

SOLUZIONE IN FORMA CHIUSA PER IL CALCOLO DELLE FREQUENZE NATURALI DI CILINDRI A PARETE SOTTILE E BORDI INCASTRATI

M. Cammalleri^a, A. Costanza^a

^a Dipartimento di Ingegneria Chimica, Gestionale, Informatica, Meccanica, Università degli Studi di Palermo, e-mail: marco.cammalleri@unipa.it, antonio.costanza@unipa.it.

Sommario

In questo lavoro si presenta un modello matematico che consente di calcolare in forma chiusa ed in maniera accurata le frequenze naturali dei gusci cilindrici circolari isotropi a parete sottile e bordi incastrati. L'equazione delle frequenze è stata determinata applicando il principio di Hamilton, mediante il metodo di Rayleigh, al sistema di equazioni indefinite del moto derivanti dalla versione di Reissner della teoria di Love, opportunamente modificata con le assunzioni di Donnell. La validazione del modello è stata effettuata mettendone a confronto i risultati sia con quelli derivanti dall'analisi modale realizzata agli elementi finiti, sia con dati sperimentali e teorici presenti in letteratura. Da tale confronto è emerso che il modello fornisce frequenze naturali molto accurate, analoghe a quelle ottenibili al FEM o per via numerica con altri modelli presenti in letteratura, ma, grazie all'approccio risolutivo utilizzato, le ottiene con equazioni esplicite in forma chiusa e quindi senza la necessità di implementare complesse risoluzioni di tipo numerico.

Parole chiave: gusci cilindrici circolari, frequenze naturali, analisi modale.

1. Introduzione

Gli elementi strutturali assimilabili a gusci cilindrici circolari a parete sottile sono molto diffusi in vari campi dell'ingegneria; ad essi sono riconducibili ad esempio le tubazioni, gli scafi dei sottomarini, le fusoliere degli aeromobili e i missili. Durante le lavorazioni meccaniche necessarie alla loro realizzazione o durante il loro normale utilizzo, questi elementi vengono spesso sollecitati da forze tempo-varianti; da qui la necessità di caratterizzarne il comportamento vibratorio al fine di ottimizzarne la progettazione ed il processo produttivo.

Sulle vibrazioni dei gusci elastici sottili, sono presenti in letteratura diverse teorie, sviluppate con varie assunzioni e semplificazioni, generalmente a partire dalle equazioni indefinite di equilibrio ricavate da Love alla fine del 19° secolo [1]. La ricerca su tale argomento è stata intensificata durante gli anni 60-70 [2] ed è stata sviluppata ulteriormente negli ultimi due decenni [3,4]. Nel corso degli anni sono stati sviluppati modelli lineari, validi per piccole deformazioni e modelli non lineari [5] validi anche per grandi deformazioni.

Per i gusci cilindrici circolari a parete sottile in particolare, le vibrazioni naturali sono state a lungo analizzate sia da un punto di vista teorico [6-13], sia da un punto di vista sperimentale [6,7,11]; recentemente è stato pubblicato uno studio mirato ad adattare le teorie classiche alle nuove applicazioni che si basano sui nanotubi in carbonio [14]. Tuttavia a causa della complessità del problema, la soluzione esatta delle equazioni indefinite del moto esiste soltanto nel caso in cui il guscio cilindrico circolare ha i due bordi opposti sollecitati da taglio puro [12]. Con altre condizioni al contorno l'integrazione di tali equazioni viene generalmente effettuata con l'ausilio di metodologie numeriche; solo in pochi casi la soluzione è stata trovata analiticamente grazie all'introduzione di

particolari assunzioni semplificative che ne hanno però limitato l'accuratezza e il campo di applicabilità.

Tra i primi studi sul calcolo delle frequenze naturali di tale tipologia di gusci vi è quello di Arnold e Warburton [6], i quali, utilizzando il metodo energetico e le relazioni di Timoshenko [15], sono riusciti a scrivere l'equazione della frequenza; la semplicità delle relazioni utilizzate e l'aver considerato i bordi semplicemente appoggiati ha permesso loro di risolvere il problema in forma chiusa. Per il caso in cui i bordi sono entrambi incastrati, Koval e Cranch [7] hanno utilizzato le equazioni di Donnell [16] ma, nonostante l'introduzione di un'ulteriore assunzione semplificativa, sono riusciti a risolvere il problema soltanto per via numerica; per il medesimo caso, Smith e Haft [8] hanno invece usato le equazioni di Flügge [17] disaccoppiate da Yu [18] che hanno però risolto anch'essi per via numerica. Callahan e Baruh [9], adoperando le equazioni di Junger e Feit [19], sono riusciti a determinare le frequenze naturali analiticamente; la loro soluzione però non è in forma esplicita e si basa su dei coefficienti, funzioni delle condizioni al contorno, della geometria e delle caratteristiche del materiale, che possono essere determinati solo numericamente; pertanto il loro modello non può essere considerato in forma chiusa. Wang e Lai [10], basandosi sulla teoria di Love [1], hanno introdotto un nuovo approccio basato sulla teoria delle onde che ha consentito loro una risoluzione in forma chiusa per diverse condizioni al contorno; tuttavia come è stato evidenziato dagli stessi autori, la soluzione risulta poco accurata per i modi naturali aventi un basso numero di onde sulla sezione ortogonale all'asse e sulla sezione longitudinale contenente l'asse. Pellicano [11], sulla base della teoria di Sanders-Koiter [20-21] ha effettuato un'analisi teorica e sperimentale con un approccio sia lineare sia non lineare per diverse condizioni al contorno; l'analisi è stata realizzata anche in questo caso utilizzando tecniche di risoluzione numerica. Nell'ultimo anno sono stati sviluppati ulteriori approcci risolutivi del problema: Xing *et al.* [12] hanno fatto ricorso alla teoria di Donnell-Mushtari [22] e per la risoluzione del problema hanno utilizzato il metodo di separazione delle variabili associato al metodo iterativo di Newton; con tale metodo sono state analizzate diverse condizioni al contorno; Xie *et al.* [13], adoperando la teoria di Goldenveizer-Novozhilov [23] e la metodologia numerica wavelet Haar, hanno analizzato diverse condizioni al contorno.

Da quanto sopra riportato, emerge quindi che in letteratura non sono presenti modelli che riescano a fornire in maniera accurata le frequenze naturali dei gusci cilindrici circolari isotropi a parete sottile e bordi incastrati, senza ricorrere a tecniche risolutive di tipo numerico. Il modello qui proposto invece, grazie ad un approccio risolutivo basato sul principio di Hamilton e sul metodo di Rayleigh, partendo dalle equazioni indefinite del moto della versione di Reissner della teoria di Love modificata con le assunzioni di Donnell, senza l'introduzione di ulteriori semplificazioni, consente di ottenere le frequenze naturali di questi elementi in forma chiusa e con precisione analoga a quella ottenibile con i metodi numerici o l'analisi FEM.

2. Equazioni differenziali del moto

Si consideri un guscio cilindrico circolare a parete sottile, di lunghezza finita l , spessore h , raggio medio a , costituito da materiale avente densità ρ , modulo di Young E e coefficiente di Poisson ν . In Figura 1 si riporta la superficie di riferimento in corrispondenza del raggio medio, il sistema di riferimento ortogonale locale, costituito dalla direzione meridiana x , circonferenziale s e radiale r , nonché gli spostamenti, u_x , u_s e u_r lungo le tre direzioni, della superficie media.

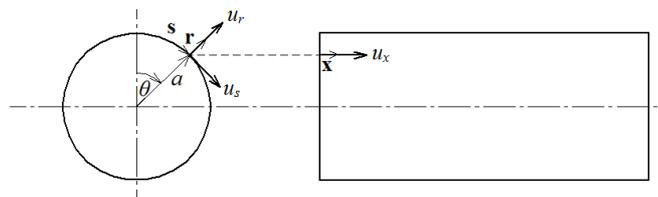


Figura 1: Superficie media di riferimento, sistema di riferimento locale e spostamenti lungo le tre direzioni del sistema di riferimento.

La rappresentazione grafica delle forze e dei momenti che derivano dallo stato tensionale interno e che agiscono sull'elemento infinitesimo di guscio è riportata in Figura 2. Tali azioni interne, così come le forze d'inerzia, sono definite per unità di lunghezza d'arco della superficie di riferimento e sono considerate applicate su di essa.

Le forze N_x , Q_x , N_{xs} agenti sulla faccia ad x costante sono le componenti del vettore \mathbf{F}_x , mentre le forze N_s , Q_s , N_{sx} agenti sulla faccia ad s costante sono le componenti del vettore \mathbf{F}_s :

$$\mathbf{F}_x = N_x \mathbf{x} + N_{xs} \mathbf{s} - Q_x \mathbf{r}, \quad \mathbf{F}_s = N_{sx} \mathbf{x} + N_s \mathbf{s} - Q_s \mathbf{r},$$

dove \mathbf{x} , \mathbf{s} ed \mathbf{r} costituiscono la terna di versori del sistema di riferimento locale. Analogamente i momenti M_x ed M_{xs} agenti sulla faccia ad x costante sono le componenti del vettore \mathbf{M}_x , mentre i momenti M_s ed M_{sx} agenti sulla faccia ad s costante sono le componenti del vettore \mathbf{M}_s :

$$\mathbf{M}_x = -M_{xs} \mathbf{x} + M_x \mathbf{s}, \quad \mathbf{M}_s = -M_s \mathbf{x} + M_{sx} \mathbf{s}.$$

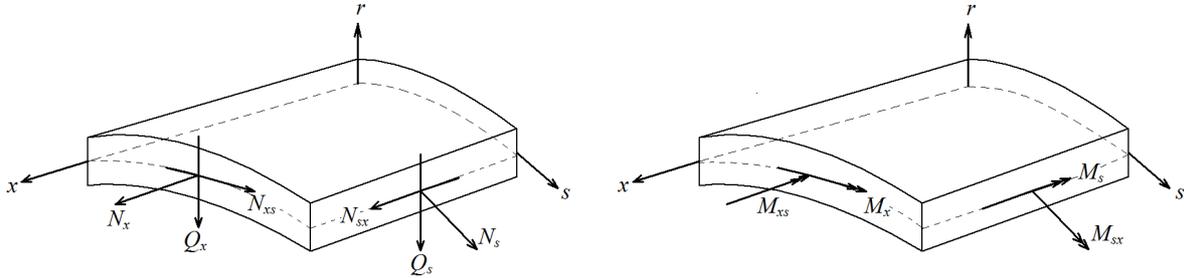


Figura 2: Forze e momenti derivanti dallo stato tensionale interno e agenti sull'elemento infinitesimo di guscio cilindrico circolare.

Sulla base della versione di Reissner [24] della teoria di Love [1] le equazioni indefinite del moto per un guscio cilindrico circolare a parete sottile possono essere scritte come:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{a} = \rho h \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{N_s}{a} = \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} - Q_s = 0.$$

Le deformazioni ε_x , ε_s e γ_{xs} , le rotazioni β_x e β_s delle tangenti lungo x ed s , le curvatures k_x e k_s , la torsione τ e gli spostamenti u_x , u_s e u_r sono correlati dalle seguenti equazioni di congruenza [24]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_r}{a}, \quad \gamma_{xs} = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s}, \quad (2.1)$$

$$\beta_x = -\frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad \beta_s = \frac{u_s}{a} - \frac{\partial u_r}{\partial s}, \quad (2.2)$$

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}, \quad k_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u_s}{a} - \frac{\partial u_r}{\partial s} \right), \quad \tau = \frac{\partial \beta_s}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial s} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_s}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial s}, \quad (2.3)$$

dove tutte le grandezze si riferiscono alla superficie di riferimento .

Le deformazioni di un generico punto distante ζ dalla superficie di riferimento possono essere scritte come:

$$\varepsilon_x(\zeta) = \varepsilon_x + \zeta k_x, \quad \varepsilon_s(\zeta) = \varepsilon_s + \zeta k_s, \quad \gamma_{xs}(\zeta) = \gamma_{xs} + \zeta \tau, \quad (3)$$

dove i secondi termini rappresentano i contributi della flessione alla deformazione.

Parte della formulazione fin qui esposta può essere semplificata mediante le approssimazioni introdotte per la prima volta da Donnell [16]. La prima assunzione riguarda le equazioni indefinite del moto e consiste nel considerare trascurabile il termine Q_s/a nell'equilibrio delle forze lungo la direzione circonferenziale s ; le equazioni (1) si riducono così al seguente sistema

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} = \rho h \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - \frac{N_s}{a} = \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (4)$$

dove la terza equazione è stata ottenuta sostituendo le quantità Q_x e Q_s esplicitate dalla quarta e dalla quinta equazione delle (1). La seconda assunzione riguarda le equazioni di congruenza (2.3); in particolare si assume che la curvatura k_s e la torsione τ siano influenzate in maniera trascurabile dalla variazione dello spostamento circonferenziale u_s ; le equazioni (2.3) si riducono quindi a:

$$k_x = -\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \quad k_s = -\frac{\partial^2 u_r}{\partial s^2} \quad \tau = -2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial s}. \quad (5)$$

Queste ultime espressioni (5), che esprimono il comportamento deformativo flessionale e torsionale della parete del guscio, sono uguali alle corrispondenti equazioni della teoria delle piastre [15]. Le due assunzioni appena esposte equivalgono infatti ad affermare che la parete del guscio cilindrico circolare (con curvatura relativamente piccola) ha un comportamento simile a quello di una piastra sottile; le uniche differenze, dovute alla curvatura della parete, sono: la presenza di N_s/a nella terza equazione del moto e la presenza di u_r/a nell'equazione della deformazione normale in direzione circonferenziale ε_s . Infine, le equazioni costitutive sono [24]:

$$N_x = K(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_s), \quad N_s = K(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_x), \quad N_{xs} = N_{sx} = \frac{K(1-\nu)}{2} \gamma_{xs} = Gh \gamma_{xs}, \quad (6)$$

$$M_x = D(k_x + \nu k_s), \quad M_s = D(k_s + \nu k_x), \quad M_{xs} = M_{sx} = \frac{D(1-\nu)\tau}{2} = Gh^3 \tau / 12,$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale e

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

sono, rispettivamente, la rigidezza estensionale e flessionale della parete del guscio.

Dalle precedenti relazioni ed introducendo la variabile θ ($s = a\theta$), le equazioni indefinite del moto, in funzione degli spostamenti, diventano:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0, \quad (7.2)$$

$$-\frac{\nu}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{a^2} - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u_r}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 u_r}{\partial \theta^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 u_r}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \quad (7.3)$$

Infine la condizione al contorno di doppio incastro viene espressa dalle seguenti equazioni:

$$u_x = u_\theta = u_r = \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

valide per $x = 0$ e $x = l$.

3. Equazione delle frequenze naturali

Per determinare le frequenze naturali del sistema è stata utilizzata una procedura analoga a quanto previsto dal metodo di Rayleigh. Sulla base delle considerazioni appresso esposte, è stata formulata un'ipotesi sulla deformata del sistema, definendo così, a meno di tre costanti moltiplicative, le tre funzioni di spostamento u_x , u_θ e u_r , assunte come autofunzioni del problema. I corrispondenti autovalori sono stati individuati però, piuttosto che rendendo stazionario il quoziente di Rayleigh, rendendo stazionaria l'azione di Hamilton. Per il principio di Hamilton infatti i moti naturali di un sistema meccanico, di cui siano note le configurazioni estreme, sono quelli che rendono stazionaria l'azione hamiltoniana A per ogni possibile variazione di configurazione; per un sistema conservativo tale principio si traduce matematicamente in

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \quad (9.1)$$

oppure

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0, \quad (9.2)$$

dove L è la funzione lagrangiana (differenza tra l'energia cinetica e potenziale del sistema), t_0 e t_1 sono i generici limiti temporali d'integrazione e δW è il lavoro virtuale compiuto da tutte le forze, comprese le forze d'inerzia, presenti nel sistema.

Questa seconda formulazione (9.2), nel caso in cui siano già note le equazioni del moto, consente di scrivere il principio di Hamilton senza la necessità di ricavare la funzione lagrangiana L in quanto il lavoro virtuale δW può essere facilmente espresso moltiplicando ciascuna delle equazioni scalari indefinite del moto per uno spostamento virtuale reversibile lungo la corrispondente direzione. Nel caso in esame, considerando le (7), si ottiene:

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right] \delta u_x \\ & + \left[\frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \right] \delta u_\theta \\ & - \left[\frac{\nu}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{a^2} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u_r}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 u_r}{\partial \theta^4} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^4 u_r}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{1-\nu^2}{E} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \right] \delta u_r \end{aligned} \right\} dx d\theta. \quad (10)$$

La deformazione in vibrazione libera dei gusci cilindrici circolari a parete sottile consiste di un numero intero positivo n di onde sulla sezione ortogonale all'asse e di un numero intero positivo m di semionde sulla sezione contenente l'asse, chiamate rispettivamente, da ora in poi, onde circonferenziali e semionde longitudinali. Ogni modo di vibrare è caratterizzato da un valore di n e di m (v., ad esempio, Figura 3).

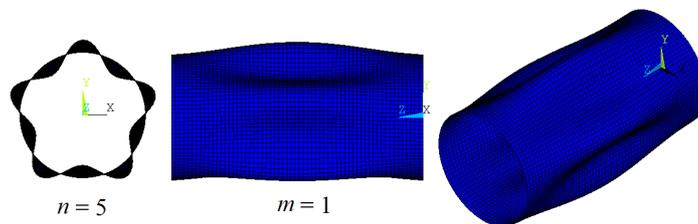


Figura 3: Modo naturale di un guscio cilindrico circolare a parete sottile con bordi incastrati, con $n = 5$ ed $m = 1$ (immagine derivante dall'analisi FEM).

La forma delle onde circonferenziali risulta indipendente dalle condizioni al contorno, mentre la forma delle semionde longitudinali vi dipende [6] e somiglia a quella delle vibrazioni flessionali delle travi sottoposte agli stessi vincoli [7, 25].

Queste considerazioni, unitamente al fatto che le autofunzioni devono rispettare le condizioni al contorno e la condizione di reciproca ortogonalità, hanno portato alla seguente formulazione:

$$\begin{aligned} u_x &= A \left[-\sin \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \Psi \sinh \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] \cos n\theta \cos \omega t, \\ u_\theta &= B \left[\cos \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \Psi \cosh \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] \sin n\theta \cos \omega t, \\ u_r &= C \left[\cos \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) + \Psi \cosh \frac{\mu}{a} \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] \cos n\theta \cos \omega t, \end{aligned} \quad (11)$$

dove A , B e C sono dei coefficienti arbitrari, ω è la pulsazione angolare e

$$\Psi = \frac{\sin(\mu l/2a)}{\sinh(\mu l/2a)}. \quad (12)$$

Per il rispetto delle condizioni la contorno la quantità μ deve soddisfare l'equazione

$$\tan \frac{\mu l}{2a} + \tanh \frac{\mu l}{2a} = 0, \quad (13)$$

le cui radici sono (oltre al valore 0):

$$\frac{\mu l}{a} = [1.506 + (m - 1)]\pi, \quad (14)$$

per $m = 1, 3, 5, 7, \dots$ ossia per un numero dispari di semionde longitudinali. Per m pari la quantità μ deve soddisfare invece l'equazione

$$\tan \frac{\mu l}{2a} - \tanh \frac{\mu l}{2a} = 0, \quad (15)$$

le cui radici sono (oltre al valore 0):

$$\frac{\mu l}{a} = [2.500 + (m - 2)]\pi, \quad (16)$$

per $m = 2, 4, 6, 8, \dots$. Ciò implica che nel caso di un numero pari di semionde, per il rispetto delle condizioni al contorno e di ortogonalità, le equazioni (11) devono essere modificate sostituendo $\sin \leftrightarrow \cos$, $\sinh \leftrightarrow \cosh$ e cambiando il segno al secondo addendo della u_r .

Nel presente lavoro lo sviluppo analitico del modello è stato effettuato solo per il caso in cui m è dispari, ma, ovviamente, uno sviluppo del tutto analogo può essere realizzato anche per m pari.

Sostituendo nella (10), le derivate parziali di u_x , u_θ e u_r e gli spostamenti virtuali δu_x , δu_θ e δu_r (calcolati considerando come uniche variabili le ampiezze A , B e C) la funzione integranda della (10) costituisce il lavoro virtuale elementare calcolato con le funzioni spostamento (11) ipotizzate. Infine integrando la (10) rispetto ad x ed a θ e successivamente la (9.2) rispetto a t , e si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\mu^2 \eta_1 + \frac{1}{2}(1 - \nu)n^2 \eta_2 - \eta_2 \Delta \right] A - \frac{1}{2}(1 + \nu)\mu n \eta_2 B - \nu \mu \eta_2 C \right\} \delta A \\ & + \left\{ -\frac{1+\nu}{2} \mu n \eta_2 A + \left[n^2 \eta_1 + \frac{1-\nu}{2} \mu^2 \eta_2 - \eta_1 \Delta \right] B + n \eta_1 C \right\} \delta B \\ & + \left\{ \nu \mu \eta_2 A - n \eta_1 B - \left[\eta_1 - \eta_1 \Delta + \frac{1}{\xi} (\mu^4 \eta_1 + n^4 \eta_1 + 2\mu^2 n^2 \eta_2) \right] C \right\} \delta C = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

dove

$$\Delta = \rho a^2 (1 - \nu^2) \frac{\omega^2}{E}, \quad (18)$$

è il fattore di frequenza e

$$\frac{1}{\xi} = \frac{h^2}{12a^2}, \quad \eta_1 = 1 + \Psi^2, \quad \eta_2 = 1 - \Psi^2 + \frac{2a}{\mu l} \sin \frac{\mu l}{a}. \quad (19)$$

Poiché le quantità δA , δB e δC sono arbitrarie, l'equazione (17) risulta soddisfatta solo se le quantità contenute nelle parentesi graffe si annullano individualmente. Uguagliando a zero tali quantità si ottiene un sistema omogeneo di tre equazioni lineari in tre incognite: A , B , C ; la soluzione banale viene esclusa imponendo il determinante dei coefficienti pari a zero e si ottiene la seguente equazione cubica per il fattore di frequenza Δ e quindi per le frequenze naturali f :

$$\Delta^3 - R_2 \Delta^2 + R_1 \Delta - R_0 = 0, \quad (20)$$

dove

$$\begin{aligned} R_2 &= \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) \mu^2 + 1 + \frac{3-\nu}{2} n^2 + \frac{1}{\xi} \left(\mu^4 + n^4 + 2\mu^2 n^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right), \\ R_1 &= \frac{1-\nu}{2} (\mu^4 + n^4) + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} - \frac{\nu \eta_2}{\eta_1} \right) \mu^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 + \mu^2 \left[\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{\eta_2 (1-\nu-2\nu^2)}{\eta_1} \right] \\ &+ \frac{1}{\xi} \left[\frac{1-\nu}{2} \left(n^2 + \mu^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) + n^2 + \mu^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \right] \left[\mu^4 + n^4 + 2\mu^2 n^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right], \\ R_0 &= \frac{1-\nu}{2} \left[1 - \nu \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \right] \mu^4 + \frac{1}{\xi} \left\{ \mu^2 n^2 \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{\eta_2}{\eta_1} - \frac{\eta_1}{\eta_2} - \left(\frac{1-\nu}{2} \right)^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right] + \frac{(1-\nu)}{2} (\mu^4 + n^4) \right\} \\ &\left[\mu^4 + n^4 + 2\mu^2 n^2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

L'equazione (20) ha tre radici diverse, reali e positive:

$$\Delta_1 = 2\alpha^{1/3} \cos \frac{\varphi+2\pi}{3} + \frac{R_2}{3}, \quad \Delta_2 = 2\alpha^{1/3} \cos \frac{\varphi+4\pi}{3} + \frac{R_2}{3}, \quad \Delta_3 = 2\alpha^{1/3} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{R_2}{3}, \quad (22)$$

dove si è posto

$$\alpha = \left[-\frac{1}{27} \left(R_1 - \frac{R_2^2}{3} \right)^3 \right]^{1/2}, \quad \varphi = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \left[R_0 - \frac{R_1 R_2}{3} + \frac{2R_2^3}{27} \right] \right\}. \quad (23)$$

Noti i valori di Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 è quindi possibile calcolare le tre frequenze naturali f_1 , f_2 ed f_3 infatti esplicitando f dall'equazione (18) si ottiene:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{E\Delta}{\rho(1-\nu^2)}}. \quad (24)$$

In definitiva, specificate le caratteristiche geometriche del guscio cilindrico circolare (lunghezza l , raggio medio a e spessore h), le caratteristiche del materiale (modulo di Young E , coefficiente di Poisson ν e densità ρ) e le forme d'onda, mediante i valori di m ed n , si calcolano i coefficienti R_2 , R_1 ed R_0 tramite le (21) e quindi i fattori di frequenza Δ per mezzo delle (22) e (23) ed infine le tre frequenze naturali mediante la (24). I coefficienti R_2 , R_1 ed R_0 dipendono da m implicitamente per il tramite di μ e di Ψ , i quali sono calcolabili, per dato m , per mezzo delle (14) o (16) e le (12) rispettivamente.

Poiché il sistema di equazioni derivante dalla (17) e che lega A , B e C è omogeneo, si possono ottenere due di questi coefficienti in funzione del terzo, ottenendo così i rapporti delle ampiezze. Si trova

$$\frac{A}{C} = \frac{\nu\mu\eta_2 + \frac{1}{2}(1+\nu)\mu n\eta_2 \left[\eta_1 - \Delta\eta_1 + \frac{1}{\xi}(\mu^4\eta_1 + n^4\eta_1 + 2\mu^2n^2\eta_2) \right]}{\frac{1}{2}(1+\nu)\nu\mu^2n\eta_2^2 - n\eta_1 \left[\mu^2\eta_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2\eta_2 - \Delta\eta_2 \right]}, \quad (25)$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\left[\eta_1 - \Delta\eta_1 + \frac{1}{\xi}(\mu^4\eta_1 + n^4\eta_1 + 2\mu^2n^2\eta_2) \right] \left[\mu^2\eta_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2\eta_2 - \Delta\eta_2 \right] - \nu^2\mu^2\eta_2}{\frac{1}{2}(1+\nu)\nu\mu^2n\eta_2^2 - n\eta_1 \left[\mu^2\eta_1 + \frac{1}{2}(1-\nu)n^2\eta_2 - \Delta\eta_2 \right]}. \quad (26)$$

4. Risultati e discussioni

Per ogni modo di vibrare di un guscio cilindrico circolare, a cui corrisponde una coppia di valori n ed m , esistono quindi tre frequenze naturali. Nella Tabella 1 sono riportate le f_1 , f_2 ed f_3 di un guscio cilindrico circolare a parete sottile e bordi incastrati avente le stesse caratteristiche geometriche, fisiche e meccaniche di quello utilizzato da alcuni autori [7,8,12]. È interessante notare che le frequenze f_i , risultano di uno o due ordini di grandezza inferiori rispetto alle frequenze f_2 ed f_3 . Inoltre f_2 ed f_3 crescono in maniera monotona al crescere di n e di m , e ciò risulta in linea con le vibrazioni libere di travi e piastre, dove le frequenze naturali aumentano al crescere della complicazione di forma del modo di vibrare. La frequenza più bassa f_1 invece, per dato m , diminuisce fino ad arrivare ad un minimo, per poi aumentare nuovamente, al crescere del numero n delle onde circolari. Il valore di n per il quale f_1 ha il minimo cresce al crescere di m . Per dato n invece, f_1 cresce generalmente con m . Analoghi risultati sono stati trovati da [7,8,12]. L'andamento apparentemente anomalo di f_1 , che prima diminuisce e poi cresce con n , è stato osservato per la prima volta da Arnold e Warburton [6] che, anche se per il caso di doppio appoggio, riuscirono a spiegare il fenomeno basandosi su considerazioni legate all'energia di deformazione flessionale ed estensionale della superficie di riferimento.

Tabella 1: Frequenze naturali per diversi valori di n e di m ($a = 76.2$ mm, $l = 304.8$ mm, $h = 0.254$ mm, $\rho = 7833$ kg/m³, $E = 206.8$ kN/mm², $\nu = 0.3$).

n	$m = 1$			$m = 3$			$m = 5$			$m = 7$			$m = 9$		
	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
1	3653	15226	20208	7904	20213	35633	9000	29006	52703	9305	38834	70069	9423	48971	87555
2	2017	20412	27304	5669	25216	39817	7612	32456	55689	8474	41266	72404	8888	50803	89473
3	1192	25505	36998	4011	30542	46465	6150	36961	60524	7413	44812	76214	8135	53623	92620
4	772	31052	47458	2892	35911	54829	4901	41926	66945	6341	49064	81366	7289	57190	96916
5	564	36938	58227	2146	41416	64206	3914	47122	74604	5371	53749	87683	6445	61295	102255
6	501	43041	69155	1651	47102	74168	3157	52489	83166	4541	58719	94961	5658	65787	108511
7	548	49284	80173	1335	52959	84485	2587	58011	92366	3852	63898	103006	4955	70565	115554
8	668	55622	91249	1162	58956	95030	2169	63678	102018	3295	69246	111651	4345	75564	75564
9	833	62026	102363	1113	65066	105729	1883	69473	111994	2856	74741	120761	3828	80744	131499
10	1029	68477	113505	1170	71265	116537	1717	75381	122209	2527	80364	130232	3402	86078	140189
11	1252	74965	124666	1308	77535	127424	1665	81384	132603	2305	86100	139986	3068	91543	149245
12	1498	81479	135843	1504	83861	138372	1714	87470	143134	2189	91936	149964	2826	97125	158600
13	1767	88015	147030	1743	90232	149366	1849	93624	153772	2174	97858	160121	2679	102810	168202
14	2058	94567	158227	2016	96641	160396	2052	99836	164495	2253	103856	170423	2628	108585	178008

Nella Tabella 2 sono riportati i rapporti di ampiezza (25) e (26) calcolati per diversi valori di m e per $n=6$. Si nota che alla frequenza naturale più bassa f_1 l'ampiezza predominante è C e quindi il moto associato a questa frequenza è prevalentemente radiale. Tale modalità di vibrazione libera viene quindi denominata modalità trasversale. Il moto radiale è invece molto contenuto alle successive frequenze f_2 ed f_3 alle quali, per bassi valori di m , prevale rispettivamente il moto longitudinale ed il moto circolare, mentre al crescere di m le due componenti di moto assumono ampiezze simili. Cionondimeno, la modalità di vibrazione libera associata ad f_2 viene in genere denominata modalità longitudinale e quella associata ad f_3 modalità circolare. Andamenti analoghi si ottengono per gli altri valori di n .

Tabella 2: Rapporti di ampiezza per diversi valori di m ed $n = 6$ ($a = 76.2$ mm, $l = 304.8$ mm, $h = 0.254$ mm, $\rho = 7833$ kg/m³, $E = 206.8$ kN/mm², $\nu = 0.3$).

	$m = 1$		$m = 3$		$m = 5$		$m = 7$		$m = 9$	
	A/C	B/C								
f_1	0.055	0.167	0.092	0.167	0.092	0.161	0.08	0.148	0.065	0.133
f_2	28.995	3.278	9.463	3.86	6.66	4.769	5.861	5.987	5.744	7.564
f_3	1.238	6.088	3.318	6.697	6.226	7.737	9.982	8.992	14.441	10.277

In letteratura [6-13], particolare attenzione è stata dedicata allo studio delle frequenze f_i in quanto di maggiore importanza per i problemi di risonanza.

Per testare la validità del modello qui proposto, le frequenze f_i calcolate con esso sono state confrontate con i dati sperimentali e teorici di Koval e Cranch [7], con i dati teorici del modello recentemente proposto da Xing *et al.* [12], nonché coi risultati di un'analisi modale condotta agli elementi finiti. L'analisi FEM è stata realizzata in ANSYS 14, utilizzando 5856 elementi di tipo lineare SHELL181. Tale livello di discretizzazione è stato scelto dopo un'analisi di convergenza che ha consentito di valutare i risultati dell'analisi modale al diminuire delle dimensioni medie dell'elemento.

In Figura 4 si riporta il confronto per i casi in cui $m = 1$ e 3 ed $n \leq 14$, da cui si evince che, per bassi valori di n , il modello teorico di Koval e Cranch si discosta notevolmente dai valori sperimentali da loro stessi misurati e dai valori derivanti dall'analisi FEM; ciò è dovuto ad una ipotesi semplificativa introdotta per risolvere numericamente il problema e che ha ristretto la validità del loro modello ai modi di vibrare aventi un rapporto n/m sufficientemente elevato. Il modello qui proposto, così come quello di Xing *et al.*, riproduce invece fedelmente sia i valori sperimentali, sia quelli derivanti dall'analisi FEM.

In effetti, il modello di Xing *et al.*, impiegando la teoria di Donnell-Mushtari, utilizza anch'esso la versione di Reissner della teoria di Love con le assunzioni di Donnell, ma le equazioni indefinite del moto vengono integrate con l'ausilio di metodi numerici e gli stessi autori hanno riscontrato problemi di divergenza della soluzione in alcune configurazioni.

Risultati affatto sovrapponibili a quelli ottenuti da Xing *et al.* erano stati ottenuti anche da Smith e Haft [8], usando le equazioni di Flügge [17] disaccoppiate da Yu [18], ma anch'essi si erano serviti della risoluzione numerica iterativa.

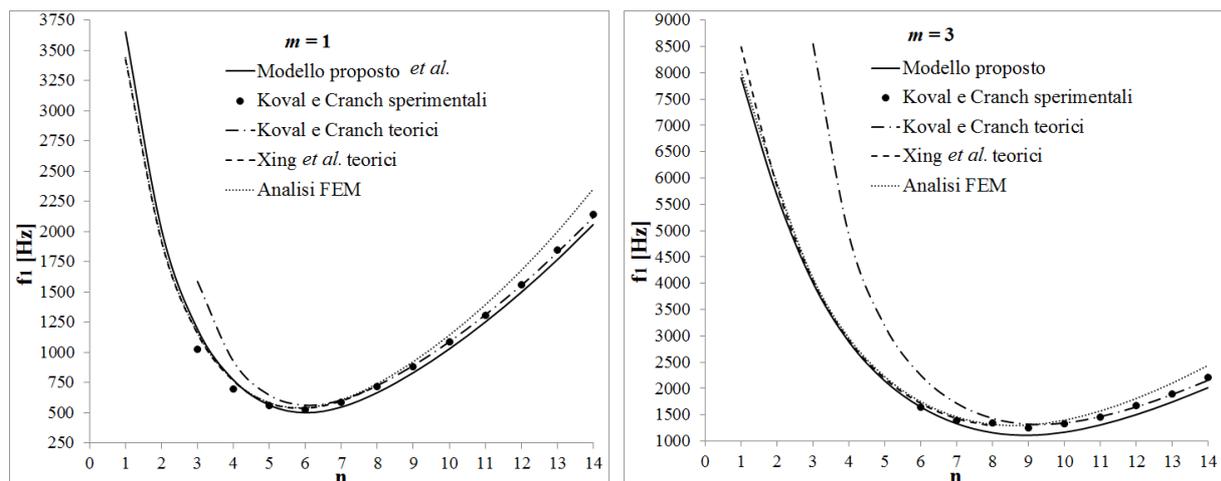


Figura 4: Confronto tra le frequenze naturali f_i calcolate col modello proposto e altri dati, per $m = 1$ e 3 ed $n \leq 14$ ($a = 76.2$ mm, $l = 304.8$ mm, $h = 0.254$ mm, $\rho = 7833$ kg/m³, $E = 206.8$ kN/mm² e $\nu = 0.3$).

Dalla Figura 4 si evince inoltre che il modello proposto è l'unico a sottostimare leggermente le frequenze f_i considerate; in particolare, tale condizione si verifica anche in corrispondenza dei valori minimi di f_i . Una leggera sovrastima si verifica soltanto per $m = 1$ ed $n \leq 4$.

L'aver ottenuto frequenze naturali f_i inferiori a quelle sperimentalmente misurate suggerisce che la rigidità flessionale modellata della parete del guscio (si ricordi che il moto associato alla frequenza f_i è prevalentemente radiale) è inferiore rispetto a quella del sistema fisico reale. Nel modello proposto, vari aspetti sono intervenuti nella modellazione di tale rigidità; si riporta di seguito una breve rassegna di questi aspetti e delle loro implicazioni.

In generale, ogni modo naturale di vibrare di un sistema è caratterizzato da una determinata frequenza; ogni vincolo deformativo aggiunto al sistema ne fa aumentare la rigidità e quindi anche le frequenze naturali. A tal riguardo uno dei postulati della teoria di Love [1], utilizzata in questo modello, suppone che la normale alla superficie di riferimento indeformata (lungo r) si mantenga normale ad essa anche dopo la deformazione; tale vincolo deformativo implica quindi una sovrastima della rigidità flessionale della parete rispetto a quella del sistema fisico reale.

Anche l'ipotizzare delle funzioni di spostamento da usare come autofunzioni porta a sovrastimare le frequenze naturali, in analogia a quanto avviene con il metodo di Rayleigh.

La seconda assunzione di Donnell implica che il comportamento deformativo della parete del guscio cilindrico, espresso dalle (5), sia uguale a quello di una piastra sottile, sottostimandone così la rigidità flessionale e torsionale.

Gli altri modelli considerati, così come l'analisi FEM, tendono invece a sovrastimare le frequenze in questione (v. Figura 4). Degno di nota è il caso di, Xing *et al.* i quali, pur avendo utilizzato le medesime equazioni del moto (7) del presente lavoro, ottengono una leggera sovrastima delle frequenze f_i ; si ritiene quindi che ciò non possa che essere dovuto alla particolare metodologia numerica utilizzata per la risoluzione del problema.

L'aver ottenuto un modello che sottostima leggermente quasi tutte le frequenze naturali f_i si traduce ovviamente in un vantaggio al fine di individuare, in sicurezza, le frequenze di risonanza del sistema fisico reale.

5. Conclusioni

In questo articolo è stato presentato un nuovo modello matematico che consente di calcolare in forma chiusa ed in maniera molto accurata le frequenze naturali dei gusci cilindrici circolari isotropi a parete sottile e bordi incastrati.

Grazie al particolare approccio risolutivo utilizzato, basato sull'uso congiunto del metodo di Rayleigh e del principio di Hamilton, si è riusciti ad ottenere un modello che ha coniugato precisione e semplicità di calcolo. Il modello qui proposto conduce infatti a risultati di accuratezza analoga a quella ottenibile con altri modelli numerici presenti in letteratura, ma li ottiene per via analitica ed in forma chiusa e quindi senza la necessità di ricorrere al calcolo numerico iterativo con i connessi problemi di divergenza della soluzione delle equazioni differenziali. Inoltre da un'analisi comparativa, con dati sperimentali di letteratura e con i risultati dell'analisi agli elementi finiti, è emerso che le frequenze fondamentali f_i calcolate con il modello, pur essendo molto prossime a quelle reali, sono quasi sempre leggermente più basse, al contrario di quanto avviene con gli altri modelli teorici analizzati, i quali tendono tutti a sovrastimare tali frequenze. Questa proprietà si traduce ovviamente in un vantaggio per l'individuazione, in sicurezza, delle frequenze di risonanza del sistema reale.

Una lacuna del modello è invece quella di essere attualmente valido solo per un numero m dispari di semionde longitudinali. Infatti la necessità di definire autofunzioni, che pur rispettando le condizioni di vincolo e reciproca ortogonalità, risultassero gestibili analiticamente nelle successive operazioni di derivazione ed integrazione, ha portato a dovere distinguere matematicamente le forme vibrazionali con m pari da quelle con m dispari. Tuttavia la tecnica risolutiva è già stata individuata, pertanto gli autori prevedono di completare a breve l'attuale modello per i casi con m pari e di verificare la possibilità di trovare soluzioni in forma chiusa anche per condizioni di vincolo diverse dal doppio incastro.

Riconoscimenti

Questa ricerca è parte del progetto DIT (Termoporazione Dinamica Irreversibile) finanziato a valere sui fondi PO FESR 2007/2013.

Lista dei simboli

a	raggio medio del cilindro.
A, B, C	ampiezze delle funzioni di spostamento, rispettivamente lungo x , θ ed r .
D	rigidezza flessionale dell'elemento infinitesimo di cilindro.
E	modulo di Young.
f	frequenza naturale.
$\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_s$	vettori forza risultanti.
G	modulo di elasticità tangenziale.
h	spessore della parete del cilindro.
k_x, k_s	curvature della superficie di riferimento.
K	rigidezza estensionale dell'elemento infinitesimo di cilindro.
l	lunghezza del cilindro.
L	lagrangiana.
m	numero di semionde longitudinali.
$\mathbf{M}_x, \mathbf{M}_s$	vettori momento risultanti.
M_{xs}, M_x, M_s, M_{sx}	momenti derivanti dallo stato tensionale (v. Figura 2).
n	numero di onde circolari.
N_x, N_{xs}, N_{sx}, N_s	forze derivanti dallo stato tensionale (v. Figura 2).
Q_x, Q_s	forze trasversali di taglio derivanti dallo stato tensionale (v. Figura 2).
\mathbf{r}, r	versore e direzione radiale.
R_1, R_2, R_3	coefficienti dell'equazione della frequenza.
\mathbf{s}, s	versore e direzione circonferenziale.
t	tempo.
u_x, u_s, u_r, u_θ	spostamenti della superficie di riferimento.
\mathbf{x}, x	versore e direzione meridiana.
α	coefficiente ausiliario dell'equazione della frequenza.
β_x, β_s	rotazioni delle tangenti alla superficie di riferimento.
γ_{xs}	deformazione di taglio della superficie di riferimento.
$\gamma_{xs}(\zeta)$	deformazione di taglio di un superficie generica distante ζ dalla superficie di riferimento.
$\delta u_x, \delta u_\theta, \delta u_r$	spostamenti virtuali reversibili della superficie di riferimento.
δW	lavoro virtuale.
Δ	fattore di frequenza.
$\varepsilon_x, \varepsilon_s$	deformazioni normali sulla superficie di riferimento.
$\varepsilon_x(\zeta), \varepsilon_s(\zeta)$	deformazioni normali di un generico punto distante ζ dalla superficie di riferimento.
ζ	distanza di un generico punto del guscio dalla superficie di riferimento.
η_1, η_2	costanti ausiliarie dell'equazione della frequenza.
θ	anomalia sul piano ortogonale all'asse del cilindro.
μ	variabile ausiliaria delle funzioni di spostamento.
ν	coefficiente di Poisson.
ξ	costante ausiliaria dell'equazione della frequenza.
ρ	densità.
τ	torsione della superficie di riferimento.
φ	coefficiente ausiliario dell'equazione della frequenza.

Ψ variabile ausiliaria delle funzioni di spostamento.
 ω pulsazione angolare.

Bibliografia

- [1] Love, A. E. H., “On the small free vibration and deformation of thin elastic shells”, 1888, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 17A, pp. 491-546.
- [2] Leissa A. W., “Vibration of shells”, 1973, NASA SP288. Washington DC: US Government Printing Office.
- [3] Qatu M. S., “Recent research advances in the dynamic behavior of shells:1989–2000, Part 2: homogeneous shells”, 2002, ASME Applied Mechanics Reviews; 55, pp. 415–34.
- [4] Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W., “Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009”, 2010, Composite Structures; 93, pp. 14–31.
- [5] Kiran Kumar P., Subrahmanyam J. V., Ramalakshmi, “A review on non linear vibration of thin shells”, 2013, Inter. Journal of Eng. Reserch and Appl. (IJERA), Vol. 3, Issue 1, pp.181-207.
- [6] Arnold R. N., Warburton G. B., “Flexural Vibration of the walls of thin Cylindrical Shells having freely supported ends”, 1949, Proc. Roy. Soc. London, 197 A, pp. 238-256.
- [7] Koval L. R., Cranch E. T., “On the free vibration of thin cylindrical shells subjected to an initial static torque”, 1962, Proc. 4th U.S. Nat’l. Congr. Appl. Mech., pp. 107-117.
- [8] Smith B. L., Haft E. E., “Natural frequencies of clamped cylindrical shells”, 1967, AIAA Journal, 6, pp. 720–1.
- [9] Callahan J. e Baruh H., “A closed-form solution procedure for circular cylindrical shell vibrations”, 1999, International Journal of solid and structures, 36, pp. 2973-3013.
- [10] Wang C. e Lai J.C.S., “Prediction of natural frequencies of finite length circular cylindrical shells”, 2000, Applied Acoustic, 59, pp. 385-400.
- [11] Pellicano F., “Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments”, 2007, Journal of Sound and Vibration, 303, pp.154–170.
- [12] Xing Y., Liu B. e Xu T., “Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions”, 2013, International Journal of Mechanical Sciences, 75, pp. 178-188.
- [13] Xie X., Jin G. e Liu Z., “Free vibration analysis of cylindrical shells using the Haar wavelet method”, 2013, International Journal of Mechanical Sciences, 77, pp. 47-56.
- [14] Silvestre N., Wang C.M., Zhang Y.Y. e Xiang Y., “Sanders shell model for buckling of single-walled carbon nanotubes with small aspect ratio”, 2011, Composite Structures, 93, pp. 1683-1691.
- [15] Timoshenko, S., “Theory of plates and shells”, 1940, New York: McGraw-hill, 1nd ed. .
- [16] Donnell L. H., “Stability of thin walled tubes under torsion”, 1933, N.A.C.A. report No.479.
- [17] Flügge W., “Stresses in shells”, 1962, Springer-Verlag, Berlin.
- [18] Yu Y. Y., “Free vibration of thin cylindrical shells having finite lengths with freely supported and clamped edges”, 1955, Journal of Appl. Mech., Vol. 77, pp. 547-552.
- [19] Junger M. C., Feit D., “Sound, Structures and Their Interaction”, 1972, MIT Press, Cambridge.
- [20] Sanders J. L. JR., “Nonlinear theories for thin shells”, 1963, Quarterly of Applied Mathematics, 21, pp. 21-36.
- [21] Koiter W. T., “On the nonlinear theory of thin elastic shells. I, II, III”, 1966, *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen B* 69, pp. 1- 54.
- [22] Mushtari, KH. M., “On the Stability of Cylindrical Shells Subjected to Torsion”, 1938, Trudy Kazanskego aviatsionnogo inatituta, in-ta, 2, (in russo).
- [23] Goldenvejzer A. L., Lidskij V. B. e Tovstik P. E., “Free Vibrations of Thin Elastic Shells”, 1979, Moscow: Nauka (in russo).
- [24] Reissner, E., “A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells”, 1941, Amer. J. Math., 63, pp. 177-184.