CAPITOLO 1

GLI INNESTI A FRIZIONE

§ 1. – Generalità.

Gli innesti a frizione sono organi meccanici che, a seguito di un comando esterno (comando di innesto) consentono il collegamento, e quindi la trasmissione del lavoro (rotazione e coppia), fra due alberi coassiali, aventi, prima dell'innesto, velocità angolari diverse.

Allo scopo, si utilizzano le forze di attrito che si suscitano nel contatto fra le due superfici dell'innesto, una solidale all'albero motore, l'altra solidale all'albero condotto, quando esse vengono premute l'una contro l'altra da un'opportuna forza di chiusura della coppia. Le due superfici, affinché possano rimanere a contatto anche quando vi sia fra loro un moto relativo (rotatorio), devono essere superfici coassiali, e quindi si usano generalmente superfici anulari piane, superfici coniche, o superfici cilindriche.

Gli innesti di tipo automobilistico hanno generalmente superfici piane (a dischi, a dischi multipli) oppure coniche.

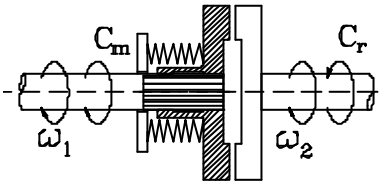

Figura 1

Sostanzialmente gli innesti a frizione sono paragonabili ai freni: in entrambi i casi l'azione di chiusura ha lo scopo di generare un transitorio che riduca e poi annulli il moto relativo fra i due membri della coppia. La differenza sta nel fatto che, nel caso dei freni il transitorio termina generalmente con il cessare del moto dell'albero condotto, mentre

nel caso degli innesti a frizione il transitorio termina quando l'albero condotto ha raggiunto le medesime velocità angolare dell'albero motore.

Nei freni, pertanto, le due superfici sono normalmente distaccate e vengono in contatto, sotto l'azione di forze di chiusura variabili, solamente per il tempo necessario alla frenatura; negli innesti a frizione le superfici della coppia sono normalmente a contatto sotto l'azione di una forza di chiusura costante e distaccate solo quando si vuole che cessi la trasmissione del moto fra movente e cedente.

La forza di chiusura della coppia è ottenuta, nei casi più comuni, da un sistema di molle adeguatamente deformate affinché fra le superfici di contatto si instauri il valore di pressione desiderato; l'entità della deformazione, e quindi il valore di pressione corrispondente, deve essere tale da garantire un sistema di forze di attrito un po' maggiore di quanto strettamente richiesto dal valore della coppia massima che l'innesto deve trasmettere; ciò eviterà lo slittamento dell'innesto in presenza di un eventuale incremento della coppia resistente oltre i valori previsti.

Inoltre mette anche in conto il fatto che, con il passare del tempo, per effetto della inevitabile usura delle superfici a contatto, la deformazione delle molle diminuisce e con essa la pressione fra le superfici stesse.

In un innesto nuovo, quindi, la pressione fra le superfici di contatto è certamente più elevata che non in un innesto già usato.

Tale maggiorazione, tuttavia, non deve essere troppo elevata in quanto andrebbe in contrasto con due altri problemi.

L'innesto deve funzionare pure come giunto di sicurezza e pertanto occorre evitare che un'improvvisa crescita del valore della coppia resistente abbia come effetto una forte decelerazione della parte motrice che potrebbe anche essere pericolosa per gli organi che ne fanno parte; ciò costituisce quindi un limite superiore al valore delle forze di attrito da suscitare nel contatto fra le superfici. D'altra parte, più elevata è la pressione fra le superfici di contatto, più elevata risulta di conseguenza la coppia dovuta alle forze di attrito che l'innesto è in grado di generare durante la fase in cui le velocità angolari fra i due alberi si mantengono ancora diverse; coppia questa che sarà motrice per l'albero condotto e resistente per l'albero motore.

Se la differenza fra tale coppia e la coppia agente sull'albero condotto è troppo grande, l'effetto dell'innesto sarà quello di una brusca accelerazione che potrebbe anche non essere tollerata dagli organi a valle;

analogamente una differenza troppo grande rispetto alla coppia motrice darebbe luogo a decelerazioni dell'albero motore altrettanto rapide che possono anch'esse essere pericolose.

Il sistema di chiusura dell'innesto, infine, deve essere tale da ridurre al minimo il tempo necessario affinché cessi il moto relativo fra i due alberi: si riduce così l'usura delle due superfici ed il lavoro perduto.

Per potere tollerare senza problemi eccessivi una usura sensibile delle superfici a contatto, senza eccedere con il valore della pressione iniziale, si adotta un sistema in parallelo di molle con costante elastica relativamente piccola.

§ 2.- Comportamento dinamico durante lo slittamento.

Consideriamo lo schema di fig.2 che si può considerare corrispondente al caso generale in cui un motore rotativo M di momento di inerzia J_m comandi un qualsiasi dispositivo utilizzatore U riconducibile ad una massa volanica (equivalente) di momento di inerzia J_u; i due alberi, coassiali, possono essere collegati da un innesto a frizione monodisco la cui superficie attiva sia una corona anulare compresa fra i raggi r_1 ed r_2; la forza di chiusura Q è generata da un sistema di molle aventi costante elastica equivalente k e delle quali sia x_0 la differenza di compressione che subiscono passando dalla fase di innesto aperto a quella di innesto chiuso.

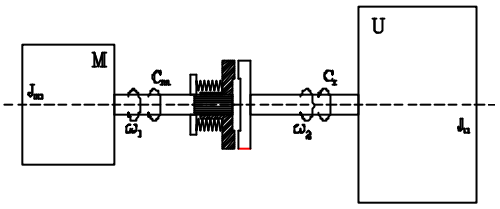

Figura 2

Sarà quindi:

$$Q = kx_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Si suppone poi che il motore M sia in grado di fornire una coppia motrice C_m, e che stia ruotando con velocità angolare w_{10}, mentre sull'albero condotto, la cui velocità angolare sia w_{20}, con $w_{20} \neq w_{10}$, agisca una coppia resistente C_r.

Il comportamento dinamico del sistema, o, se si preferisce, il modo di

variare delle velocità angolari, w_1 di M ed w_2 di U, dai valori iniziali al comune valore w assunto al termine dell'innesto, dipenderà non solo dal modo di variare delle coppie esterne, C_m e C_r, agenti sul sistema, ma anche, ed è la caratteristica peculiare di un sistema di questo tipo, dalla coppia interna che si suscita per effetto dello strisciamento fra le superfici dell'innesto, e che sarà presente per tutto il tempo occorrente ad M e ad U per assumere la medesima velocità angolare w.
Il valore M_f di questa coppia dipende naturalmente da Q; sarà dato da:

$$M_f = fQ\frac{r_1 + r_2}{2} = fkx_0\frac{r_1 + r_2}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

e potrà pure essere variabile nel tempo se è $Q = \mathrm{Q}(t)$.
Infatti, dato il sistema di chiusura dell'innesto, occorre, normalmente, un certo intervallo di tempo prima che la Q raggiunga il suo valore massimo, tempo che dipende da come, dall'esterno, viene azionato il comando di chiusura della coppia stessa.
Non è fuor di luogo ipotizzare, in relazione al sistema di chiusura dato per l'innesto, che nella (2) il valore x_0 si raggiunga dopo un certo tempo t_0 con una legge lineare del tipo $x = d\,t$ e che quindi sia pure lineare la legge di variazione di Q come pure quella di M_f, ossia che sia:

$$M_f(t) = fQ(t)\frac{r_1 + r_2}{2} = fkx(t)\frac{r_1 + r_2}{2} = fkd\,t\frac{r_1 + r_2}{2} = mt \qquad \textbf{(3)}$$

Pertanto il tempo durante il quale ha luogo lo slittamento dell'innesto andrebbe suddiviso in due fasi: una prima in cui sia $Q = \mathrm{Q}(t)$ e di conseguenza (2) che sia anche $M_f = \mathrm{M_f}(t)$, ed una successiva in cui è $Q = Q_0$ e la M_f ha il suo valore massimo M_0.

Per quanto sopra, l'analisi dinamica deve essere condotta distinguendo almeno fra la fase in cui lo slittamento esiste e la fase in cui M ed U, raggiunta la comune velocità angolare w, ruotano come un unico sistema rigido sotto l'azione della C_m e della C_r.
Durante la prima si hanno due masse distinte, M ed U, sulle quali la M_f agisce come coppia esterna: resistente per la massa M e motrice per la massa U.
Nella prima fase pertanto, e solo finché è $w_1 \neq w_2$, dovranno valere le equazioni di equilibrio delle due masse M ed U:

$$\begin{cases} C_m - M_f - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ M_f - C_r - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

mentre nella seconda l'equilibrio dinamico andrà espresso come:

$$C_m - C_r - (J_m + J_u)\dot{w} = 0 \quad \textbf{(5)}$$

La scrittura delle (4) e della (5), tenendo conto di quanto è stato prima detto sulla variabilità nel tempo delle coppie in giuoco, consente di fare alcune considerazioni preliminari.

Nella ipotesi che sia $w_{10} > w_{20}$, il raggiungimento, in un certo intervallo di tempo, della comune velocità angolare w richiede che, in quell'intervallo, sia mediamente $\dot{w}_1 < 0$ ed $\dot{w}_2 > 0$; pertanto nelle (4) dovrà essere, mediamente[(•)] $M_f > C_m$, ed $M_f > C_r$.

Se M_f è variabile da 0 al suo valore massimo M_0, con $C_m > 0$, la velocità angolare dell'albero motore aumenterà fino a quando non si raggiunga la condizione $M_f = C_m$.

Nel caso particolare in cui fosse $w_{20} = 0$, il moto dell'albero condotto non potrà iniziare fino a quando la condizione $M_f > C_r$ non si verifichi, e in tal caso se si ha un valore di M_f troppo grande rispetto alla C_m si potrebbe avere l'arresto dell'albero motore se lo slittamento cessa prima che sia $w_2 > 0$.

Se, invece, fosse $w_{10} < w_{20}$ (con $w_{10} > 0$) si avrebbe all'inizio dell'innesto il moto relativo opposto e quindi, nelle (4), è da considerarsi $M_f < 0$: motrice quindi per l'albero motore e resistente per l'albero condotto; la velocità angolare dell'albero motore crescerebbe (in modo molto rapido) e quella dell'albero condotto diminuirebbe (in modo altrettanto rapido), e quindi la durata dello slittamento è molto più breve.

Banali invece sono le deduzioni che si possono fare in base alla (5): la velocità angolare delle due masse potrà rimanere costante solo se $C_m = C_r$; crescerà se la coppia motrice è maggiore della coppia resistente, decrescerà nel caso opposto.

Una condizione di regime si avrà quindi solo quando i valori delle due coppie raggiungeranno il medesimo valore.

(•) Data la possibile variabilità nel tempo delle coppie è possibile che le due accelerazioni angolari non mantengano costantemente il loro segno.

§ 3. – Innesto di una frizione con coppia motrice costante.

Consideriamo ora, per lo stesso schema di fig.2, i diversi casi che si possono presentare nel collegamento ad un motore la cui coppia motrice rimanga costante (per es. un motore elettrico).

a)

Supponiamo che la coppia resistente si mantenga anch'essa costante ed esprimibile quindi come:

$$C_r = C_0 \tag{6}$$

e che l'innesto della frizione sia istantaneo, talché la sua coppia, durante lo slittamento abbia il valore massimo

$$M_f = M_0 \tag{7}$$

Per determinare la legge del moto del sistema, durante l'intervallo di tempo necessario alle velocità angolari ω_{10} ed ω_{20} ($w_{10} > w_{20}$) ad assumere il comune valore ω, e quindi cessi il moto relativo fra M ed U, occorrerà scrivere le (4) come:

$$\begin{cases} C_m - M_0 - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ M_0 - C_0 - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \tag{4'}$$

Dalla integrazione della prima delle (4') si può ricavare la legge del moto dell'albero motore:

$$w_1 = w_{10} - \frac{M_0 - C_m}{J_m} t \tag{8}$$

che mostra, con $M_0 > C_m$, una diminuzione lineare della sua velocità angolare.

Analogamente l'integrazione della seconda delle (4') consente di ricavare la legge del moto dell'albero condotto

$$w_2 = w_{20} + \frac{M_0 - C_0}{J_u} t \tag{9}$$

la quale mostra ancora una variazione di tipo lineare con il tempo, ma l'andamento, crescente o decrescente dipende dal segno del numeratore della frazione; quindi solo se $M_0 > C_0$ la velocità angolare

dell'albero condotto potrà crescere per portarsi, a un dato istante, t^*, ad avere lo stesso valore di quella dell'albero motore.
In quell'istante dovrà essere, per la (8) e la (9):

$$w^* = w_{10} - \frac{M_0 - C_m}{J_m} t^* = w_{20} + \frac{M_0 - C_0}{J_u} t^* \qquad \textbf{(10)}$$

da cui:

$$t^* = \frac{J_m J_u}{J_m (M_0 - C_0) + J_u (M_0 - C_m)} (w_{10} - w_{20}) \qquad \textbf{(11)}$$

è il tempo a cui cessa lo strisciamento dell'innesto. Questo valore sosti-

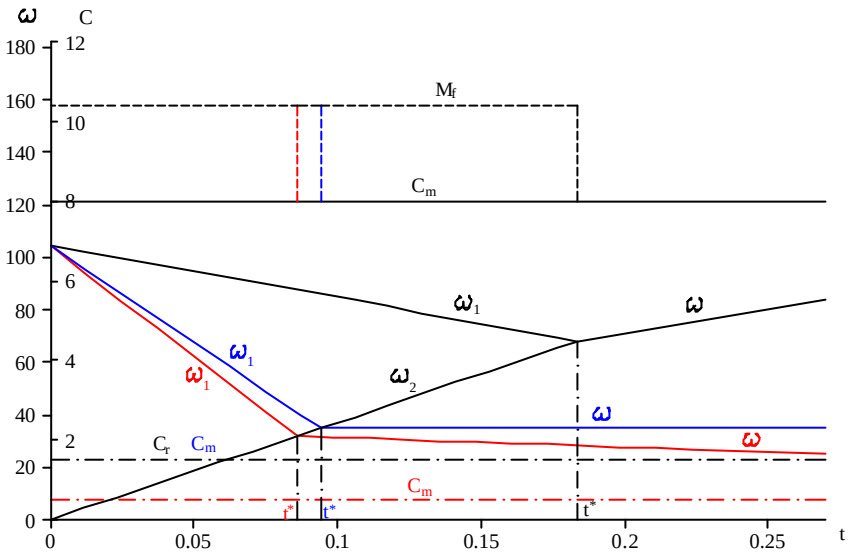

Figura 3

tuito in una delle (10) darà infine:

$$w^* = \frac{J_m (M_0 - C_0) w_{10} + J_u (M_0 - C_m) w_{20}}{M_0 (J_m + J_u) - (J_m C_0 + J_u C_m)} \qquad \textbf{(12)}$$

che è la velocità comune ai due alberi al termine dello slittamento dell'innesto.
Trascorso questo istante, il sistema diventa un unico rigido ed il suo equilibrio deve essere descritto dalla equazione:

$$C_m - C_0 - (J_m + J_u)\dot{w} = 0 \qquad \textbf{(5')}$$

e la legge del moto del sistema diventa:

$$w = w^* + \frac{C_m - C_0}{J_m + J_u}\left(t - t^*\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Pertanto, come già visto, la velocità angolare rimarrà costante se le due coppie sono uguali, mentre crescerà o diminuirà linearmente a seconda del segno che risulta a numeratore della frazione.

La figura 3 mostra quanto sopra descritto relativamente a tre casi in cui la coppia motrice C_m è maggiore, uguale o minore della coppia resistente. Sono stati evidenziati i tre differenti istanti t^* in cui, nelle tre condizioni, ha termine la fase dello slittamento dell'innesto. E' stata pure ipotizzata la condizione comune che la frizione sia in grado di trasmettere una coppia massima M_f pari ad 1.3 volte la coppia massima che il motore può fornire.

Per quanto riguarda il tempo di slittamento, si badi che la condizione ottimale è quella che corrisponde a $C_m = C_r$; è vero che la condizione $C_m < C_r$ dà un tempo di slittamento minore, ma, proprio per ciò, il sistema è destinato a fermarsi avendosi alla fine una velocità angolare decrescente; solo la condizione $C_m = C_r$ consente, come deve essere, di avere al termine dello slittamento dell'innesto una velocità costante.

Si può infine rilevare che, come d'altronde è ovvio, la variazione del valore della Cm influisce solamente sull'andamento della velocità angolare dell'albero motore e su quella finale dell'intero sistema, ma non sulla velocità angolare dell'albero condotto.

b)

Se la coppia trasmessa dalla frizione varia invece linearmente come ipotizzato con la (3), e per cui si ha:

$$M_f(t) = mt$$

le equazioni di equilibrio dei due sottosistemi, durante la fase dello slittamento dell'innesto, si scriveranno nella forma:

$$\begin{cases} C_m - mt - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ mt - C_0 - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(14)}$$

L'integrazione della prima delle (14) consente di ricavare:

$$w_1 = w_{10} - \frac{1}{2J_m}\left(mt - 2C_m\right)t \qquad \textbf{(15)}$$

che mostra come la velocità angolare dell'albero motore assuma un andamento parabolico, regolato dal valore assunto dalla quantità entro parentesi. Essa sarà quindi dapprima crescente e poi decrescente: crescente finché sarà $mt < C_m$, e cioè fino all'istante $t_{1M} = C_m / m$ in cui la velocità angolare avrà raggiunto il valore:

$$w_{1M} = w_{10} + \frac{1}{2}\frac{C_m^2}{mJ_m} \qquad \textbf{(15')}$$

decrescente poi passando, se ve ne sono le condizioni, per il valore iniziale all'istante:

$$t_{01} = 2\frac{C_m}{m} \qquad \textbf{(16)}$$

A parità di C_m, sia t_{1M} che t_{01}, così come pure il valore di w_M, saranno tanto minori quanto maggiore è il valore di m, ossia quanto più rapidamente viene manovrato l'innesto della frizione.
Tuttavia il valore di t_{01} ottenuto dalla (16) non è detto che sia corretto: lo sarà solo se esso risulta minore del valore di t' corrispondente al tempo in cui sia $M_f = M_0$ e che vale ovviamente:

$$t' = \frac{M_0}{m}$$

istante in cui la velocità angolare dell'albero motore avrà il valore dato, come si vedrà, dalla prima delle (19).
Diversamente dovrà essere:

$$t_{01} = \frac{M_0^2}{2m(M_0 - C_m)} \qquad \textbf{(16')}$$

La condizione limite per cui $t_{01} = t'$, (16) o (16'), è quella per cui è $M_0 = 2C_m$.
Ad analoghe considerazioni porta l'esame della legge del moto dell'albero condotto ottenuta dalla integrazione della seconda delle (14); questa ci consente di scrivere:

$$w_2 = w_{20} + \frac{1}{2J_u}(mt - 2C_0)t \qquad \textbf{(17)}$$

Anche per questo albero si ottiene un andamento parabolico della sua velocità angolare; e anche qui, vediamo, questa potrà iniziare a cresce-

re oltre il valore iniziale solo dopo un tempo:

$$t_{02} = 2\frac{C_0}{m} \tag{18}$$

dopo essere scesa fino al valore:

$$w_{2m} = w_{20} - \frac{1}{2}\frac{C_0^2}{mJ_u}$$

in corrispondenza dell'istante $t_{2m} = C_0/m$.

A parità di C_0, questo tempo sarà tanto più breve quanto maggiore è il valore di m, ossia quanto più rapidamente viene manovrato l'innesto della frizione. Se fosse, in particolare, $w_{20} = 0$ si avrebbe dapprima, nel tempo fra $t = 0$ e $t = t_{2m}$, l'inversione della velocità angolare dell'albero condotto la quale potrà riprendere il suo verso solo dopo il tempo $t = t_{02}$.

Si può ancora aggiungere, sempre nella ipotesi che sia $w_{20} = 0$, che, per dato m, se si fosse nelle condizioni di avere una C_m troppo inferiore alla C_0, e con un t_{02} eccessivamente lungo, la w_1 potrebbe avere il tempo di ridursi fino ad annullarsi, e si avrebbe quindi l'arresto del motore.

Le equazioni (15) e (17) prima trovate valgono, naturalmente, per il tempo necessario perché la coppia trasmessa dalla frizione raggiunga il suo valore massimo M_0, ossia per un

$$t' = \frac{M_0}{m}$$

In quell'istante, (15) e (17), le velocità angolari dei due alberi saranno:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_{10} - \frac{1}{2J_m}(M_0 - 2C_m)\frac{M_0}{m} \\ \omega'_2 &= \omega_{20} + \frac{1}{2J_u}(M_0 - 2C_0)\frac{M_0}{m} \end{aligned} \tag{19}$$

ed ha inizio una fase successiva nella quale le condizioni di equilibrio dinamico tornano ad essere date dalle (4'). Durante questa fase le leggi del moto dei due alberi saranno allora corrispondenti alle (8) e (9), sostituendo però i valori (19) al posto di ω_{10} e di ω_{20};
ossia:

$$\omega_1 = \omega'_1 - \frac{M_0 - C_m}{J_m}(t - t')$$
$$\omega_2 = \omega'_2 + \frac{M_0 - C_0}{J_u}(t - t') \qquad \textbf{(4")}$$

Analogamente l'istante in cui ha termine lo slittamento sarà dato da:

$$t^* = t' + \frac{J_m J_u}{J_m(M_0 - C_0) + J_u(M_0 - C_m)}(w'_1 - w'_2) \qquad \textbf{(11')}$$

e la velocità comune al termine dello slittamento da:

$$w^* = w'_1 - \frac{M_0 - C_m}{J_m}(t^* - t') = w'_2 + \frac{M_0 - C_0}{J_u}(t^* - t') \qquad \textbf{(10')}$$

La legge del moto del sistema dopo il termine dello slittamento è ovviamente rappresentato di nuovo dalla (13).

Con gli stessi dati utilizzati per il diagramma di fig.3 si è tracciato il grafico di fig. 4 dove si è aggiunta la condizione che la coppia trasmessa dalla frizione raggiunga il suo valore massimo con una variazione lineare.

Relativamente all'andamento della velocità angolare w_1, risulta subito evidente che, nell'intervallo temporale fra 0 e t', la circostanza di una $C_m > C_r$ dà luogo alla temporanea crescita iniziale già indicata prima,e che questa perdura fino a che il valore della coppia trasmessa dalla frizione si mantiene al di sotto del valore della C_m; è evidente pure rilevare che, fino a quando questo stato permane, il lavoro fatto dalla C_m è maggiore del lavoro fatto dalla M_f. La stessa cosa accade per gli altri due valori della C_m anche se in modo meno visibile, nella scala di rappresentazione dei valori in ascisse. Successivamente, e fino all'istante t^*, il lavoro fatto dalla M_f è sempre maggiore di quello della C_m e quindi la w_1 non può che decrescere.

Una analoga, e simmetrica, osservazione riguarda l'anda-mento della w_2; il lavoro fatto dalla M_f inizia a superare quello della C_r solamente dopo l'istante in cui si ha l'intersezione delle corrispondenti curve. Pertanto, fino a tale istante, la w_2 diminuirà per poi crescere: poiché il caso rappresentato pone fra le condizioni iniziali che sia $w_2 = 0$, accade, di conseguenza, che la w_2 diventa dapprima negativa per raggiungere di nuovo il valore 0 all'istante indicato con t_{02}.

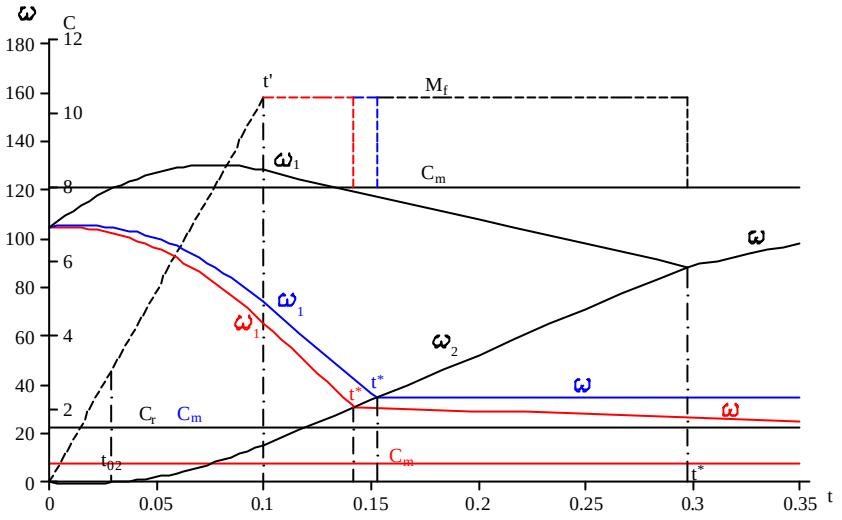

Figura 4

Per quanto riguarda la durata, t^*, dello slittamento dell'innesto valgono le osservazioni fatte per il caso precedente, osservando soltanto, in aggiunta, che in quest'ultimo caso essa è cresciuta; si ha il vantaggio, però, di un quadro migliore per ciò che riguarda l'andamento delle accelerazioni angolari dei due alberi.

c)

Supponiamo adesso che la coppia resistente non sia costante, come nella ipotesi fin qui fatta, ma variabile, per esempio, linearmente con la velocità angolare ω_2 dell'albero condotto e, cioè, che sia:

$$C_r = C_0 + cw_2 \qquad \textbf{(20)}$$

Le condizioni di equilibrio delle due masse volaniche (14), relative alla fase dell'innesto graduale della frizione, si scriveranno:

$$\begin{cases} C_m - mt - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ mt - (C_0 + cw_2) - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

Di queste, la prima, che riguarda l'albero motore, porterà naturalmente a ritrovare la (15) con le relative considerazioni che ne derivano, mentre dall'integrazione della seconda si ottiene:

$$w_2 = \frac{m}{c}\left[t - \left(\frac{C_0}{m} + \frac{J_u}{c}\right)\right] + \left[w_{20} + \frac{m}{c}\left(\frac{C_0}{m} + \frac{J_u}{c}\right)\right] e^{-\frac{c}{J_u}t} \qquad \textbf{(22)}$$

questa velocità angolare non potrà cominciare a crescere se prima non

è trascorso il tempo:

$$t_{02} = \frac{J_u}{c} \ln\left[\frac{c}{mJ_u}\left(w_{20}c + C_0\right) + 1\right] \tag{23}$$

valore per cui la (22) presenta un gradiente positivo.
Da questo istante in avanti si avrà la sovrapposizione, su un andamento lineare, di un andamento esponenziale negativo e quindi con una influenza sempre più debole con il tempo, e tanto più bassa quanto minore è il fattore di crescita della coppia resistente, c, rispetto al valore del momento d'inerzia, J_u, dell'utenza.

All'istante $t' = M_0/m$ in cui l'innesto è in grado di trasmettere il valore massimo della coppia, le velocità angolari dei due alberi saranno:

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_{10} - \frac{1}{2J_m}\left(M_0 - 2C_m\right) \\ w'_2 &= \frac{1}{c}\left(M_0 - C_0 - \frac{mJ_u}{c}\right) + \left[w_{20} + \frac{m}{c}\left(\frac{C_0}{m} + \frac{J_u}{c}\right)\right] e^{-\frac{c}{J_u}\frac{M_0}{m}} \end{aligned} \tag{24}$$

e da qui in poi e condizioni di equilibrio delle due masse volaniche devono essere scritte nella forma:

$$\begin{cases} C_m - M_0 - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ M_0 - \left(C_0 + cw_2\right) - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \tag{25}$$

L'integrazione delle (25) a partire dall'istante t' fornisce, per le due velocità angolari:

$$\begin{aligned} w_1 &= w'_1 - \frac{M_0 - C_m}{J_m}\left(t - t'\right) \\ w_2 &= \frac{M_0 - C_0}{c} + \left(w'_2 - \frac{M_0 - C_0}{c}\right) e^{-\frac{c}{J_u}(t - t')} \end{aligned} \tag{26}$$

La prima è analoga alla (8); la seconda mostra che la velocità angolare dell'albero condotto cresce ancora esponenzialmente, purché, come mostra la derivata della seconda delle (26):

$$\dot{w}_2 = -\frac{c}{J_u}\left(w'_2 - \frac{M_0 - C_0}{c}\right) e^{-\frac{c}{J_u}(t - t')} \tag{27}$$

la quantità entro parentesi risulti negativa; cosa d'altronde non difficile a verificarsi dal momento che, a fronte di una velocità angolare che, in questa fase, non può essere troppo elevata, la coppia trasmessa dalla frizione è più elevata della coppia resistente e che il valore di c è verosimilmente un numero minore dell'unità. Se così non fosse la conseguenza sarebbe un rallentamento dell'albero condotto ed un protrarsi della fase di slittamento dell'innesto.

Dalla intersezione delle due funzioni in (26) si possono dedurre il valore di t^* e quello di w^*, deducendo la durata complessiva dello slittamento dell'innesto ed il valore finale comune dei due alberi.

Per la fase successiva all'istante t^*, l'equazione da integrare è:

$$C_m - (C_0 + cw) - (J_m + J_u)\dot{w} = 0 \qquad \textbf{(28)}$$

e la conseguente legge del moto è:

$$w = \frac{C_m - C_0}{c} + \left(w^* - \frac{C_m - C_0}{c} \right) e^{-\frac{c(t-t^*)}{J_m + J_u}} \qquad \textbf{(29)}$$

La velocità angolare del sistema, nella ipotesi ovvia che, per $t = t^*$, la coppia motrice sia maggiore della coppia resistente, crescerà allora fino a raggiungere asintoticamente il valore di regime:

$$w_r = \frac{C_m - C_0}{c} \qquad \textbf{(30)}$$

valore per il quale (28) sarà $\dot{w} = 0$. Il corrispondente tempo, teoricamente infinito, può farsi corrispondere, come è prassi, a quello necessario a raggiungere la velocità angolare $w = 0.95 w_r$.

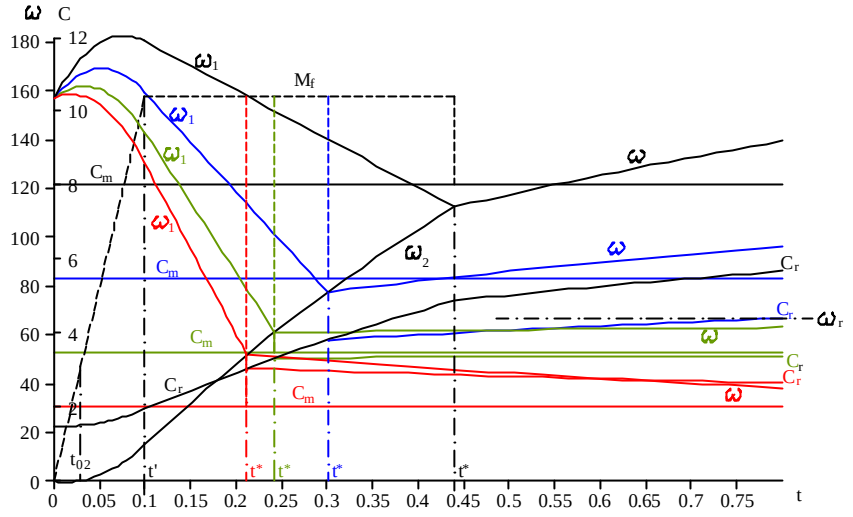

Figura 5

Il diagramma di fig.5 mostra quanto sopra descritto, relativamente a quattro valori diversi della coppia motrice C_m.

Poiché si sta ipotizzando che la coppia resistente cresca proporzionalmente con la velocità angolare w_2 dell'albero condotto (si è qui supposto un rateo di crescita del 3%), si avranno quattro differenti curve per la C_r: e poiché fino a che non cessa lo slittamento, all'stante t^*, il valore della w_2 è indipendente da C_m, fino a questo istante le quattro curve risultano sovrapposte, e si differenziano solo successivamente quando la velocità angolare di riferimento è la w comune ai due alberi.

Anche in questo caso, come nel caso precedente, si può rilevare che un valore di coppia motrice troppo elevato ha come effetto una durata maggiore dello slittamento dell'innesto, ed una velocità finale crescente, mentre un valore di C_m troppo basso fa diminuire il tempo dello slittamento dell'innesto ma porta ad una velocità finale in diminuzione. La situazione migliore (con i dati utilizzati) è quella in cui è C_m=3.5: si ha una velocità a regime pressoché costante e la minima durata dello slittamento; per questo caso è indicato in figura. il valore corrispondente alla (30).

Si badi che il confronto di questo diagramma con quello di fig.4 può essere fatto solo tenendo presente che, a parità di valore di C_m, la velocità iniziale w_{10} qui supposta è maggiore, rispetto all'altra, del 50% e questo giustifica il manifestarsi di tempi di slittamento più elevati.

d)

Se poi dovesse ritenersi che la coppia resistente sia variabile con il quadrato della velocità angolare dell'albero condotto, e quindi sia del tipo:

$$C_r = C_0 + cw_2^2 \tag{31}$$

le condizioni di equilibrio delle due masse volaniche (14), relative alla fase dell'innesto graduale della frizione, si scriveranno:

$$\begin{cases} C_m - mt - J_m \dot{w}_1 = 0 \\ mt - \left(C_0 + cw_2^2\right) - J_u \dot{w}_2 = 0 \end{cases} \tag{32}$$

equazioni di cui interessa soffermarci solamente sulla seconda, essendo la prima identica a quella del caso precedente.
La legge del moto dell'albero condotto in un caso come questo, in cui l'equazione differenziale non è lineare, può essere ricavata con una integrazione di tipo numerico. Una buona approssimazione, valida solamente per il caso in cui sia $w_{20} = 0$, può essere rappresentata dalla forma:

$$w_2 = \frac{1}{J_u}\left[-C_0 t + \frac{m}{2}t^2 - \frac{c}{3}\left(\frac{C_0}{J_u}\right)^2 t^3\right] \tag{33}$$

mentre per il caso generale, avendo posto:

$$\alpha = \frac{C_0 + c\omega_{20}^2}{J_u}$$

si dovrà scrivere:

$$\omega_2 = \omega_{20} - \alpha t + \frac{1}{J_u}\left(\frac{m}{2} + \alpha c \omega_{20}\right)t^2 - \frac{\alpha^2 c}{3J_u}t^3 \tag{33'}$$

La (33) o la (33') sono valide nell'intervallo di tempo compreso fra l'istante iniziale, inizio del contatto fra le superfici dell'innesto, e l'istante $t' = \frac{M_0}{m}$ (•) in cui lo stesso ha raggiunto il valore massimo della coppia

(•) L'ipotesi che la coppia resistente possa variare con il quadrato della velocità angolare, introdotta in questa fase, per quanto realistica, può anche essere superflua dal punto di vista quantitativo, specialmente se si riferisce al caso di ve-

trasmissibile attraverso lo slittamento.
Le velocità angolari dei due alberi, con $w_{20} = 0$, saranno, per $t=t'$:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_{10} - \frac{1}{2J_m}\left(M_0 - 2C_m\right) \\ \omega'_2 &= \omega_{20} - \frac{\alpha M_0}{m} + \frac{1}{J_u}\left(\frac{m}{2} + \alpha c \omega_{20}\right)\left(\frac{M_0}{m}\right)^2 - \frac{\alpha^2 c}{3J_u}\left(\frac{M_0}{m}\right)^3 \end{aligned} \qquad \textbf{(34)}$$

Superato questo istante, le (32) dovranno essere sostituite con le nuove condizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} C_m - M_0 - J_m \dot{\omega}_1 = 0 \\ M_0 - \left(C_0 + c\omega_2^2\right) - J_u \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(35)}$$

La soluzione della prima è, naturalmente, identica alla prima delle (26); quella della seconda, posto

$$a = \sqrt{\frac{M_0 - C_0}{c}} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{a + w'_2}{a - w'_2}$$

é la funzione:

$$w_2 = \frac{a\left[be^{\frac{2ac}{J_u}(t-t')} - 1\right]}{be^{\frac{2ac}{J_u}(t-t')} + 1} \qquad \textbf{(36)}$$

che mostra ancora un'andamento crescente della velocità angolare dell'albero condotto, a condizione però che c sia sufficientemente piccolo, e quindi tale che il valore della coppia resistente nel suo complesso non cresca tanto da superare il valore di M_0.
Sarà poi il punto di intersezione di questa funzione con la prima delle (26) a fissare l'istante t^*, in cui sarà $\omega_1=\omega_2=\omega^*$, e quindi il termine della fase di slittamento dell'innesto.

Superato l'istante t^* l'equilibrio dell'intero sistema è dato da:

$$C_m - \left(C_0 + cw^2\right) - \left(J_m + J_u\right)\dot{w} = 0 \qquad \textbf{(37)}$$

---

locità angolare iniziale nulla; la legge del moto ottenuta con il valore massimo della forza di chiusura Q, indica un andamento esponenziale della ω_2 che crescerà quindi debolmente per valori di t molto piccoli; per valori minori della Q è lecito ipotizzame una crescita ancora più debole e quindi variazioni piccole della coppia resistente complessiva.

da cui si ricava la legge del moto:

$$w = \frac{a\left[be^{\frac{2ac}{J_m+J_u}(t-t^*)}-1\right]}{be^{\frac{2ac}{J_m+J_u}(t-t^*)}+1} \qquad \textbf{(38)}$$

nella quale si è posto ancora:

$$a = \sqrt{\frac{C_m - C_0}{c}} \qquad \text{e} \qquad b = \frac{a+w^*}{a-w^*}$$

Anche in questo caso la velocità angolare del sistema crescerà (e in modo ovviamente tanto più rapido quanto maggiore è il divario fra la C_m e la C_r), fino a raggiungere, in un tempo teoricamente infinito, la velocità di regime:

$$w_r = \sqrt{\frac{C_m - C_0}{c}} \qquad \textbf{(39)}$$

valore per il quale (37)) sarà $\dot{w} = 0$. In modo analogo al caso precedente, il tempo da prendere in considerazione per il raggiungimento della condizione di regime può essere quello necessario a raggiungere la velocità angolare $w = 0.95 w_r$.

Occorre tuttavia tener presente, e relativamente a ciascuno dei

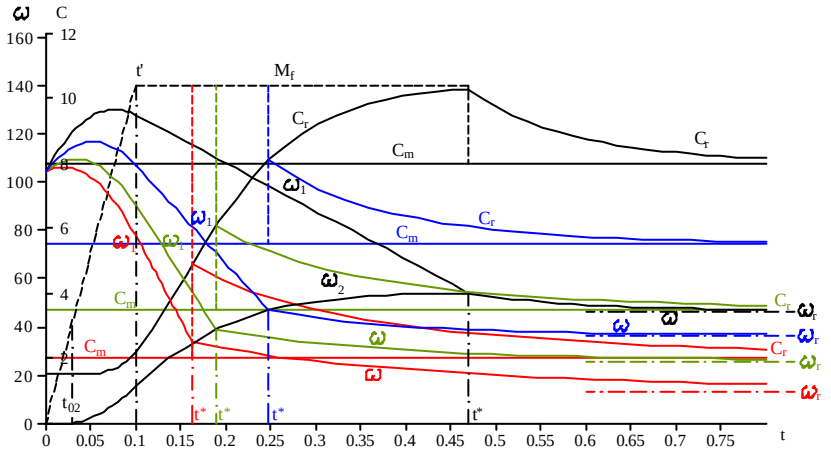

Figura 6

casi sopra descritti, che il termine dello slittamento dell'innesto non necessariamente deve verificarsi dopo che la coppia trasmessa dalla frizione ha raggiunto il suo valore massimo M_0: se i valori in giuoco, C_m, C_r, J_m, J_u, ed m sono tali da determinare una più rapida convergenza

delle due velocità angolari w_1 ed w_2 lo slittamento dell'innesto può pure una durata più breve.

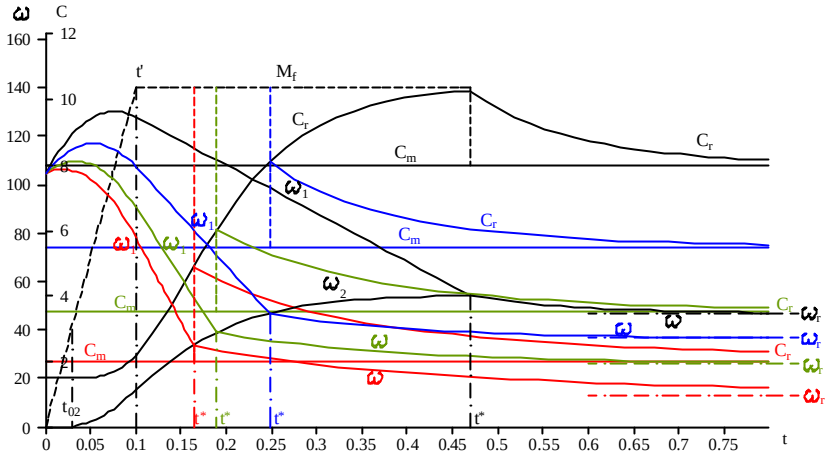

Figura 6

Il diagramma di fig.6, è stato tracciato con gli stessi dati utilizzati per il diagramma precedente ad eccezione del coefficiente di proporzionalità della legge di variazione della coppia resistente (31) supposto 10 volte più basso. La lettura può essere fatta quindi in modo analogo.

Si evidenzia la circostanza, in questo caso, che la migliore situazione si ha per un valore di coppia motrice più alto (5.5) del caso precedente (la coppia resistente cresce più rapidamente); per questo valore la velocità al termine dello slittamento dell'innesto risulta con un valore che è il più vicino a quello che avrà la velocità a regime: anche se la durata dello slittamento è leggermente maggiore, il tempo necessario affinché si raggiunga il valore asintotico (39) della velocità finale risulta inferiore.

§ 3. – Innesto di una frizione con coppia motrice variabile.

Quando il sistema è azionato da un motore in cui è possibile la regolazione della coppia motrice (per es. nei motori alternativi) l'analisi del comportamento dell'innesto a frizione deve prevedere il modo con cui tale regolazione viene effettuata.

Esaminiamo il caso, per avere un riferimento concreto, dell'avvio da fermo di un veicolo, in cui, come è noto la regolazione

della potenza e la manovra del comando dell'innesto sono concomitanti ma indipendenti e comunque hanno globalmente lo scopo di ottenere, al termine della manovra, o una certa velocità finale w_f, oppure una certa accelerazione finale $\dot{w}_f$.

La frizione sia dimensionata in modo da poter trasmettere, durante lo slittamento, una coppia y volte maggiore della coppia massima C_{mm} che il motore è in grado di fornire.
Del motore interesserà conoscere, oltre al valore della coppia massima C_{mm}, ed il corrispondente valore della velocità angolare w_{cm}, anche l'intera curva di coppia $C_m(w_1)$, ed il suo momento d'inerzia J_m. Del veicolo, d'altra parte, interesserà la sua massa M, il raggio di rotolamento delle ruote, r_c, il rapporto di riduzione totale della trasmissione(•), t, ed il coefficiente di trazione(••), f_t. Sarà infine necessario conoscere se il veicolo si trova su un piano orizzontale (i=0) oppure su un piano inclinato (i ¹ 0).

Al fine di ridurre il sistema allo schema di fig.2 , occorre anzitutto calcolare il valore del momento di inerzia del veicolo riportato all'albero condotto della frizione.
Sarà sufficiente imporre l'eguaglianza dell'energia cinetica della massa volanica equivalente con l'energia cinetica del veicolo, ossia:

$$\frac{1}{2} J_{ev} w_2^2 = \frac{1}{2} M v^2$$

dove è:

$$v = \omega_r r_c = \frac{\omega_2}{\tau} r_c$$

Si può ricavare, pertanto:

$$J_{ev} = M \left(\frac{r_c}{t} \right)^2 \qquad \textbf{(40)}$$

A tale valore va aggiunto il momento d'inerzia di tutte le masse rotanti,

(•) Ovviamente in I marcia.
(••) Definito come rapporto fra la forza di trazione necessaria a vincere la resistenza al rotolamento opposta dal veicolo, ed il peso del veicolo stesso. Tiene quindi conto cumulativamente delle perdite dovute all'attrito volvente e delle perdite per attrito radente in corrispondenza di tutte le parti mobili comprese fra l'albero condotto dell'innesto e la ruota.

di cui quelle che hanno maggiore rilevanza sono quelle delle ruote:

$$J_r = \sum_2^n J_{ri}\left(\frac{w_{ri}}{w_2}\right)^2 = \frac{1}{t^2}\sum_2^n J_{ri}$$

dove si è indicato con J_{ri} il momento d'inerzia della singola ruota rispetto al suo asse di rotazione, e quindi con i variabile da 2 alle n ruote del veicolo. Pertanto sarà:

$$J_u = J_{ev} + J_r + \sum_x \frac{J_x}{t_x^2} \qquad \textbf{(41)}$$

volendo includere anche i momenti d'inerzia equivalenti delle altre x parti rotanti e che presentano ciascuna un rapporto di riduzione t_x rispetto all'albero condotto dell'innesto.

D'altra parte, data la bassa velocità iniziale del veicolo, si può trascurare sia la resistenza aerodinamica che un possibile incremento della coppia resistente legata alla velocità angolare, e quindi la coppia resistente sull'albero condotto dell'innesto, C_{r0}, si può ritenere costante e dipendente in parte dalla trazione e in parte dalla pendenza della strada; si può pertanto porre:

$$C_{r0} = M\left(f_t + i\right)\frac{r_c}{t} \qquad \textbf{(42)}$$

Supporremo infine che, durante la manovra di innesto della frizione, coppia motrice e coppia trasmessa dalla frizione variano linearmente con il tempo partendo entrambe dal valore 0 per raggiungere: la prima, in un tempo t_0, un prefissato valore C_{m0}, la seconda, in un tempo t', il valore massimo $y\,C_{mm}$, quello che l'innesto sarebbe capace di trasmettere slittando.
I tempi t_0 e t' sono dettati dalla modalità con cui il conducente manovra i relativi comandi, e ad essi è quindi legata solamente la rapidità con cui avviene la variazione delle coppie: i valori massimi indicati potrebbero non essere raggiunti se lo slittamento dell'innesto cessa prima che sia trascorso il tempo t_0, il tempo t', o entrambi.

Le due leggi di variazione, durante la fase iniziale della manovra dell'innesto, saranno quindi:
per la coppia motrice

$$C_m = k_m t \qquad \textbf{(43)}$$

con

$$k_m = \frac{C_{m0}}{t_0} \qquad \textbf{(43')}$$

e per la coppia trasmessa dalla frizione:

$$C_f = mt \qquad \textbf{(44)}$$

con

$$m = \frac{y C_{mm}}{t'} \qquad \textbf{(44')}$$

Ciò posto, le due equazioni di equilibrio per J_m e per J_u saranno:

$$\begin{cases} k_m t - mt - J_m \dot{\omega}_1 = 0 \\ mt - C_{r0} - J_u \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} (k_m - m)t - J_m \dot{\omega}_1 = 0 \\ mt - C_{r0} - J_u \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(45)}$$

L'integrazione delle due equazioni, considerando che all'istante iniziale è $\omega_2 = 0$, porta a:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_{10} - \dfrac{m - k_m}{2J_m} t^2 \\ \omega_2 = \dfrac{1}{J_u}\left(\dfrac{m}{2} t - C_{r0}\right) t \end{cases} \qquad \textbf{(46)}$$

La prima delle (46) mostra che se è $m = k_m$, ossia se i valori istantanei della coppia trasmessa dalla frizione e della coppia motrice si mantengono uguali, la velocità angolare dell'albero motore resterà costante; invece, se la differenza a numeratore è negativa la sua velocità angolare inizierà a crescere, se positiva a diminuire, e, in entrambi i casi, con legge parabolica. La prima delle due evenienze porterà senz'altro ad un aumento della durata dello slittamento dell'innesto, la seconda, se avviene in modo troppo rapido potrebbe portare anche all'arresto del motore.

Un'analisi simile può farsi sul comportamento iniziale dell'albero condotto, sulla base della seconda delle (46). Si osserva immediatamente che l'albero condotto non potrà aumentare la sua ve-

locità angolare fino a quando la quantità tra parentesi, che è funzione del tempo, non sia positiva: ossia dopo l'istante:

$$t_{00} = \frac{2C_{r0}}{m} \tag{47}$$

e questo tempo sarà tanto più elevato quanto più è elevata la coppia resistente, e tanto più breve quanto più è grande m ossia quanto più rapida è la manovra della frizione; rapida per evitare che w_2 scenda a valori negativi eccessivi, ma non troppo rapida tuttavia perché, come si visto prima, si potrebbe incorrere nell'arresto del motore. E' questa la situazione tipica dell'avvio di un veicolo che si trovi su una rampa: situazione che si risolve aumentando il valore di k_m(•) di tanto quanto basta a non far diminuire troppo il valore di w_1.

Se lo slittamento dell'innesto non è cessato entro il tempo t_0, in tale istante le velocità angolari dei due alberi saranno, tenendo conto della (43'):
per l'albero motore

$$w'_1 = w_{10} - \frac{C_{m0}^2}{2J_m k_m}\left(\frac{m}{k_m} - 1\right) \tag{48}$$

e per l'albero condotto

$$w'_2 = \frac{C_{m0}^2}{2J_u k_m}\left(\frac{m}{k_m} - \frac{2C_{r0}}{C_{m0}}\right) \tag{49}$$

con $w'_1 > w'_2$.

Dopo questo istante l'equazione che regola il moto dell'albero motore sarà:

$$C_{m0} - mt - J_m \dot{w}_1 = 0 \tag{50}$$

mentre quella che regola il moto dell'albero condotto sarà ancora data (45) da:

$$mt - C_{r0} - J_u \dot{w}_2 = 0 \tag{51}$$

Conseguentemente la legge del moto dell'albero motore sarà ora (15 §3):

(•) Si ricordi che i valori sia di m che di k_m sono regolati in modo indipendente da chi compie la manovra.

$$w_1 = w'_1 - \frac{1}{2J_m}\left[m(t+t_0) - 2C_{m0}\right](t-t_0) \qquad \textbf{(52)}$$

e quella dell'albero condotto sarà ancora data dalla seconda delle (46).

Ora, se scriviamo la (52) come:

$$w_1 = w'_1 - \frac{1}{J_m}\left[\frac{m(t+t_0)}{2} - C_{m0}\right](t-t_0) \qquad \textbf{(52')}$$

e se teniamo conto che il primo termine entro la parentesi quadra corrisponde al valore medio della coppia trasmessa dalla frizione nell'intervallo di tempo compreso fra t_0 e t, vediamo chiaramente che se la modalità della manovra del comando dell'innesto è tale per cui, dopo il tempo t_0, questo valore medio di M_f si mantiene al di sotto del valore di C_{m0}, allora la w_1 crescerà ancora fino a quando la differenza in questione non darà un valore positivo; è chiaro anche che questa situazione durerà tanto più a lungo quanto minore è il valore del coefficiente angolare m.
D'altra parte l'avere:

$$m(t+t_0) - 2C_{m0} > 0$$

corrisponde (43') ad avere

$$\frac{t}{t_0} > 2\frac{k_m}{m} - 1$$

e tale rapporto deve essere necessariamente ≥ 1; quindi se è $m = k_m$, si ha $t = t_0$ ed w_1 inizierà a decrescere immediatamente, mentre se è $k_m > m$ si ha $t > t_0$ e l'intervallo $t - t_0$ è quello che deve trascorrere prima che w_1 inizi a decrescere.

Di nuovo, se lo slittamento dell'innesto non è cessato prima che si sia raggiunto il tempo t', le velocità angolari dei due alberi, in quell'istante, saranno, tenendo conto dalla (44'):

$$w'_1 = w'_{10} - \frac{1}{2mJ_m}\left[(y\,C_{mm} + mt_0) - 2C_{m0}\right](y\,C_{mm} - mt_0) \qquad \textbf{(53)}$$

per l'albero motore, e:

$$w'_2 = \frac{1}{J_u}\left(\frac{y\,C_{mm}}{2} - C_{r0}\right)\frac{y\,C_{mm}}{m} \tag{54}$$

per l'albero condotto.

Dall'istante t' in avanti, l'innesto trasmette il valore massimo possibile di coppia, e quindi il moto dei due alberi è regolato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} C_{m0} - y\,C_{mm} - J_m\dot{w}_1 &= 0 \\ y\,C_{mm} - C_{r0} - J_u\dot{w}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

con $y\,C_{mm} > C_{m0} > C_{r0}$.

Le corrispondenti leggi del moto saranno date quindi da:

$$\begin{aligned} w_1 &= w'_1 - \frac{y\,C_{mm} - C_{m0}}{J_m}(t - t') \\ w_2 &= w'_2 + \frac{y\,C_{mm} - C_{r0}}{J_u}(t - t') \end{aligned} \tag{56}$$

che mostrano l'evidente convergenza delle due velocità angolari verso il comune valore w^*.

Il cessare dello slittamento (se non si fosse già verificato prima) avverrebbe allora, come si può ricavare facilmente eguagliando le due espressioni, all'istante:

$$t^* = t' + \frac{J_m J_u (w'_2 - w'_1)}{y\,C_{mm}(J_m + J_u) - J_m C_{r0} - J_u C_{m0}} \tag{57}$$

Superato tale istante, il collegamento dei due alberi è ormai rigido; gli alberi sono sollecitati solamente dalla C_{m0} fornita dal motore e la legge del moto del sistema nel suo complesso sarà quella che si può ricavare dalla equazione:

$$C_{m0} - C_{r0} - (J_m + J_u)\dot{w} = 0 \tag{58}$$

ossia:

$$w = w^* + \frac{C_{m0} - C_{r0}}{J_m + J_u}(t - t^*) \tag{59}$$

E' il medesimo risultato (13), ovviamente, trovato al paragrafo precedente e per cui valgono le considerazioni già fatte.

Si tenga presente che la (58), e quindi la (59), non valgono so-

lamente a partire dall'istante t^* così come è indicato nella (57), ma, più in generale, a partire da quell'istante in cui lo slittamento ha effettivamente termine e quindi le due velocità angolari hanno assunto il comune valore w^*.

Infatti se, per esempio, lo slittamento dell'innesto dovesse cessare nella fase in cui sono valide le (45), il corrispondente istante si otterrebbe dalle (46) ponendovi $w_1 = w_2 = w^*$ e ricavando il corrispondente tempo t^* nella forma:

$$t^* = \frac{J_m C_{r0}}{(J_m + J_u)m - J_u k_m} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2J_u\left[(J_m + J_u)m - J_u k_m\right]}{J_m C_{r0}^2} w_{10}} \right) \quad \textbf{(60)}$$

e questa dovrebbe fornire una soluzione reale con un valore che deve risultare minore sia di t_0 (43'), istante a partire dal quale la coppia motrice non cresce più, sia di t' (44'), istante in cui la coppia trasmessa dalla frizione ha raggiunto il suo massimo valore.

Lo slittamento della frizione cessa in questo istante: albero motore ed albero condotto sono solidali, e la coppia trasmessa dalla frizione assume istantaneamente il valore $C_m^* = k_m t^*$; il moto dell'intero sistema sarà regolato da una equazione come la (58), con $C_{m0} = C_m^*$.

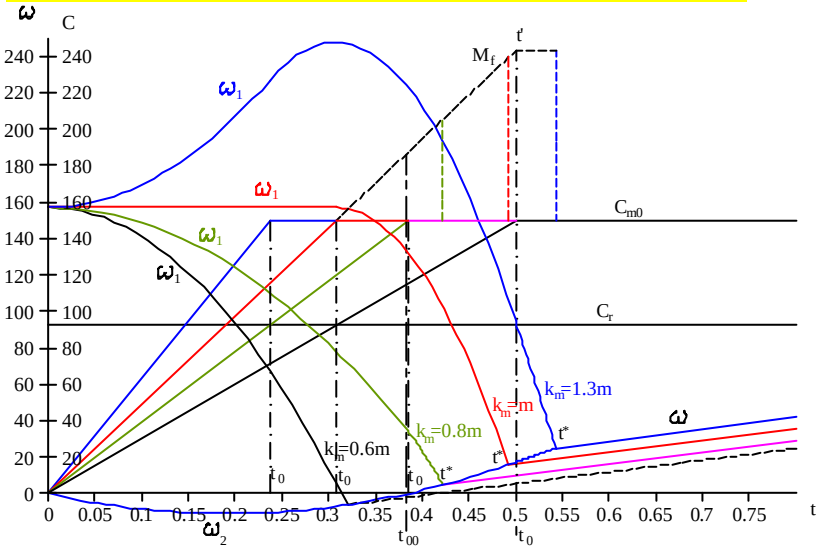

Figura 7

In modo analogo si deve procedere per individuare l'eventuale valore di t^* all'interno dell'intervallo temporale che caratterizza le altre fasi descritte. Non si riportano le corrispondenti formule analitiche che risultano inutilmente ingombranti a fronte della possibilità di un calcolo

numerico, in questo caso sicuramente più agevole.

Quanto sopra è illustrato nel diagramma di fig.7, relativamente a quattro differenti modalità (43) di variazione della coppia motrice: si è infatti ipotizzato, sempre con una $C_{m0} > C_r$, una situazione in cui la coppia motrice cresce più rapidamente della coppia trasmessa dalla frizione $(k_m = 1.3m)$, poi che sia $k_m = m$, poi ancora che sia $k_m = 0.8m$ e infine una situazione in cui è ancora $k_m < m$ ma con $t_0 = t'$, ossia tale che sia $k_m = m\dfrac{C_{m0}}{y C_{mm}}$.

Si può subito osservare che quest'ultima circostanza non consente l'avvio del veicolo: la velocità angolare dell'albero motore decresce tanto rapidamente da azzerarsi (e diventare teoricamente negativa) prima ancora che quella dell'albero condotto riesca ad essere positiva; l'arresto del motore è di fatto inevitabile.

Totalmente opposta è la situazione che si verifica con $k_m > m$: la coppia motrice, nell'intervallo fra $t = 0$ e $t = t_0$, si mantiene sempre a valori superiori a quelli della coppia trasmessa dalla frizione, e ciò provoca il rapido aumento iniziale della velocità angolare dell'albero motore, w_1, che potrà cominciare a diminuire solo dopo che questo rapporto fra le coppie agenti sull'albero motore si inverte. Contemporaneamente, il valore elevato della coppia resistente rispetto ai valori della M_f (ipotesi che può corrispondere ad un avvio in salita) tiene la w_2 su valori negativi (il veicolo indietreggia) per un tempo abbastanza lungo e pertanto la durata dello slittamento dell'innesto, t^*, si allunga notevolmente.

Si accorcia invece il tempo t^* se è $k_m = m$, situazione caratterizzata dal fatto che, fra $t = 0$ e $t = t_0$, la w_1 rimane ovviamente costante. Con i valori adottati, si può rilevare, il termine dello slittamento si ha prima che l'innesto riesca a trasmettere il suo massimo del valore di coppia.

Lo stesso accade per $k_m = 0.8m$, dove la w_1 decresce fin dall'istante $t = 0$ ma non troppo rapidamente per cui il tempo dello slittamento è ancora più basso ma sufficiente perché il motore non si arresti.

Si può rilevare infine che cessato lo slittamento, se il motore non si è arrestato, la velocità angolare ω, ormai comune alla parte motrice ed alla parte condotta, cresce linearmente e con la stessa legge: la

sua variazione infatti, trascorso il tempo t^*, dipende esclusivamente dalla differenza fra la la coppia motrice e la coppia resistente, differenza che ormai è costante.