1)

Un treno che viaggia alla velocità v_0 di 100km/h viene frenato in modo che la sua velocità v si riduce del 10% nel primo intervallo di tempo Δt di 40s.

a) Calcolare la sua velocità dopo altri 80s, ipotizzando che, nell'intero periodo di 120s, la decelerazione sia proporzionale alla velocità;
b) Trovare un'espressione per la forza frenante in N/t_{massa} del treno;
c) Trovare la potenza che viene dissipata all'istante finale dell'intero periodo, assumendo che il treno abbia una massa di 500t.

a) – Essendo la decelerazione proporzionale alla velocità, deve essere:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{da cui:} \quad \frac{dv}{v} = -kdt \qquad \textbf{(1)}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \log v\Big|_{v_0}^{v_f} &= -k\left(t_f - t_0\right) \\ \log \frac{v_0}{v_f} &= k\left(t_f - t_0\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

in cui è v_0=100, v_f=0.9v_0=90, (t_f-t_0)=40.
Si può quindi ricavare:

$$k = \frac{\log\left(v_0/v_f\right)}{\left(t_f - t_0\right)} = \frac{\log(100/90)}{40} = \frac{0.10536}{40} = 0.0026340$$

Pertanto, dalla seconda delle (2), si ha che, dopo l'intervallo di tempo di 120s, la velocità finale sarà di:

$$v_f = v_0 e^{-k\left(t_f - t_0\right)} = 100e^{-0.002634*120} = 72.90\left[\frac{km}{h}\right]$$

b)

Indicando con F_w la forza frenante, e in assenza di altre forze esterne, deve essere; e, per unità di massa e tenendo conto della (1):

$$\frac{F_w}{m} = a = -kv = -0.002634v\left[\frac{m}{s^2}\right] = -0.002634v\left[\frac{N}{kg}\right] = -2.634v\left[\frac{N}{t}\right]$$

dove v deve essere espressa in m/s.

c)

Al termine dei 120s, quando il treno ha assunto la velocità v_f=72.9[km/h]=20.25[m/s], la forza frenante complessiva è:

$$F_w = 500 * (-2.634 * 20.25) = -26.7\ 10^3 [N]$$

e la potenza dissipata è:

$$P_w = F_w v_f = 26.7\ 10^3 * 20.25 = 541 [kW]$$

2)
a) Mostrare che il rendimento di una macchina battipalo (rapporto fra il lavoro utile compiuto nell'affondamento del palo e l'energia iniziale della testa battente), quando viene impiegata per conficcare un palo di date dimensioni, aumenta con la massa della testa, ipotizzando che non vi sia rimbalzo sulla testa del palo.
b) Un palo avente massa m_p=500kg viene conficcato nel terreno da una testa avente massa m_t=800kg che cade da un'altezza h=3m dalla testa del palo. Il palo penetra per una profondità s=6mm e non c'è rimbalzo. Trovare la forza resistente che si oppone alla penetrazione del palo, resistenza supposta costante, ed anche l'energia spesa nella deformazione della testa.

a)
Per la conservazione della quantità di moto deve essere:

$$m_t v_t = (m_p + m_t) v$$

essendo v la velocità comune a battente e palo dopo l'impatto.
Si ricava quindi:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t \qquad \textbf{(3)}$$

Inoltre tutta l'energia cinetica posseduta dalle due masse è utilizzata per compiere il lavoro utile, e pertanto questa sarà uguale al lavoro compiuto per conficcare il palo.
Si ha quindi:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2 \qquad \textbf{(4)}$$

e quindi il rendimento:

$$h = \frac{\frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2}{\frac{1}{2} m_t v_t^2} = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{v}{v_t}\right)^2 = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{m_t}{m_p + m_t}\right)^2 = \frac{m_t}{m_p + m_t}$$

sarà tanto maggiore quanto più grande è il valore di m_t.

b)
La velocità con cui la testa battente impatta la testa del palo è data da:

$$v_t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3} = 7.67 [m/s]$$

e quindi dalla (3) si ha:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t = \frac{800}{800 + 500} 7.67 = 4.72[m/s]$$

L'energia cinetica (4) avrà allora il valore:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t)v^2 = 0.5 \cdot 1300 \cdot 4.72^2 = 14480[Nm] \qquad \textbf{(5)}$$

e questa deve eguagliare il lavoro compiuto dalla forza resistente nell'avanzamento del palo che affonda, ossia deve essere T=R*s; si ricava quindi:

$$R = \frac{T}{s} = \frac{14480}{0.006} = 2413333[N] = 2.41[MN]$$

La differenza fra l'energia cinetica iniziale della testa T_t e il lavoro utile (5) sarà il lavoro di deformazione della testa del palo.
Poiché è:

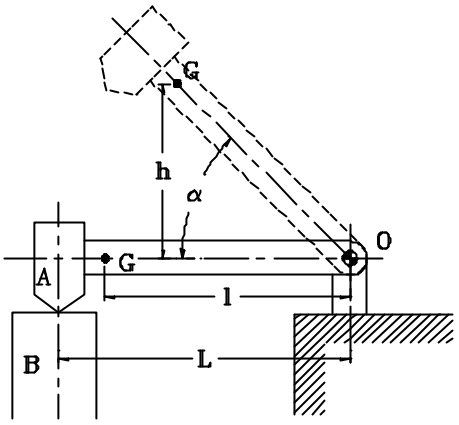
$$T_t = \frac{1}{2} m_t v_t^2 = 0.5 \cdot 800 \cdot 7.67^2 = 23532[Nm]$$

il lavoro di deformazione sarà:

$$L_w = T_t - T = 23532 - 14480 = 9052[J] \cong 9[kJ]$$

3)

E' mostrato in figura un martello oscillante, vincolato in O mediante una coppia rotoidale, la cui testa A è appoggiata sulla testa di un palo B in un punto distante orizzontalmente L=450 mm. Il martello, insieme al braccio OA ha una massa m_m= 25 kg; il suo baricentro si trova ad una distanza l=400 mm da O sull'orizzontale, ed il suo giratore d'inerzia k_0 intorno ad un asse passante per G, e perpendicolare al piano di figura, è di 75 mm. Il palo ha massa m_p= 135 kg.



Il martello colpisce, senza rimbalzo, la testa del palo partendo da una posizione ruotata, come indicato in figura, di un angolo α=45°.

Trovare la velocità angolare del martello immediatamente prima dell'impatto e la velocità lineare del palo subito dopo l'impatto. Si trascuri la resistenza offerta dal terreno in cui penetra il palo.

Indichiamo con ω_1 la velocità angolare di OA prima dell'impatto, con ω_2 la medesima dopo l'impatto e con v la velocità iniziale del palo dopo l'impatto.
Il momento d'inerzia del martello intorno all'asse passante per O è dato da:

$$I_O = I_G + m_m l^2 = m_m k_0^2 + m_m l^2 = m_m \left(k_0^2 + l^2\right)$$

dove è m_m= 25 *kg*, k_0=75 10^{-3} *m*, l=400 10^{-3} *m*.
Quindi è:

$$I_O = 25 \cdot \left(0.075^2 + 0.4^2\right) = 4.141 \left[kg\, m^2\right]$$

Ora, l'energia potenziale del martello nella posizione sollevata, con il baricentro a quota h=OGsinα, sarà eguale all'energia cinetica del martello stesso all'istante immediatamente prima dell'impatto.
Deve cioè essere:

$$m_m g h = \frac{1}{2} I_O w_1^2$$

da cui:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2m_m gh}{I_O}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 9.81 \cdot 0.4 \cdot \sin 45°}{4.141}} = 5.79 \left[rad / s\right]$$

Trascurando la resistenza del terreno, e tenendo conto che la reazione nella coppia rotoidale O non ha momento rispetto allo stesso punto O, per la conservazione del momento della quantità di moto, si può scrivere:

$$I_O w_1 = I_O w_2 + m_p vL = I_O w_2 + m_p w_2 L^2 = w_2 \left(I_O + m_p L^2\right)$$

essendo proprio $v = w_2 L$.
Si può quindi ricavare:

$$w_2 = \frac{I_O w_1}{I_O + m_p L^2} = \frac{w_1}{1 + m_p L^2 / I_O} = \frac{5.79}{1 + \left(135 \cdot 0.45^2\right) / 4.141} = 0.762 \left[rad / s\right]$$

e

$$v = w_2 L = 0.762 \cdot 0.45 = 0.343 \left[m / s\right]$$

4)

Un vagone che si muove su un tratto orizzontale di un binario urta un secondo vagone. I respingenti di entrambi hanno ciascuno la medesima costante elastica k=0.7MN/m.

Il primo vagone ha una massa m_1=10t e la sua velocità iniziale è v_{01}=1.8m/s, mentre il secondo vagone ha una massa m_2=15t con una velocità iniziale v_{02}=0.6m/s nello stesso verso del primo.

Trovare:

a) la velocità v comune ai due vagoni che si muovono insieme durante l'impatto;
b) l'energia cinetica perduta dal sistema, convertita in lavoro di deformazione di ciascuna molla dei respingenti;
c) le velocità, v_{1f} e v_{2f}, dei due vagoni dopo la separazione nella ipotesi che solamente la metà della energia immagazzinata nelle molle venga restituita.

a)

Per la conservazione della quantità di moto, essa calcolata prima dell'impatto deve essere eguale a quella calcolata nell'istante in cui i due vagoni hanno la medesima velocità. Deve cioè essere:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v$$

da cui:

$$v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 1.8 + 15 \cdot 0.6}{10 + 15} = 1.08 [m/s]$$

b)

L'energia cinetica perduta dal sistema e convertita in lavoro di compressione delle molle dei respingenti è data dalla differenza fra l'energia cinetica posseduta dai due vagoni prima dell'impatto e quella dell'intero sistema subito dopo l'impatto. Ossia:

$$L_w = T_1 + T_2 - T_{12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

e quindi:

$$\begin{aligned} L_w &= 0.5\left[10 \cdot 10^3 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 10^3 \cdot 0.6^2 - (10 + 15) \cdot 10^3 \cdot 1.08^2\right] = \\ &= 0.5 \cdot 10^3 \left(10 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 0.6^2 - 25 \cdot 1.08^2\right) = 500 \cdot (32.4 + 5.4 - 29.16) = \\ &= 500 \cdot 8.64 = 4.32 [kJ] \end{aligned}$$

E questo deve eguagliare il lavoro di compressione delle 4 molle dei re-

spingenti che è da esprimere come $4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$ indicando con x appunto la compressione di ciascuna molla.
Si avrà allora:

$$L_w = 4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

da cui:

$$x = \sqrt{\frac{L_w}{2 \cdot k}} = \sqrt{\frac{4320}{2 \cdot 0.7 \cdot 10^6}} = 10^{-3}\sqrt{3085.7} = 55.5 \cdot 10^{-3}\,[m] = 55.5\,[mm]$$

c)
Dopo la separazione di due vagoni la loro energia cinetica totale dovrà essere quella che avevano prima della separazione aumentata della metà del lavoro di deformazione delle molle. Vale a dire:

$$T_{1f} + T_{2f} = T_{12} + \frac{1}{2}L_w$$

ossia:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}L_w$$

Contemporaneamente dovrà aversi la conservazione della quantità di moto, e quindi dovrà essere pure:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2)v$$

I valori di v_{1f} e di v_{2f} si possono ricavare quindi dal sistema:

$$\begin{cases} 10 \cdot v_{1f}^2 + 15 \cdot v_{2f}^2 = 25 \cdot 1.08^2 + 4.32 = 33.48 \\ 10 \cdot v_{1f} + 15 \cdot v_{2f} = 25 \cdot 1.08 = 27 \end{cases}$$

Si ottengono per la velocità le seguenti coppie di valori:
v_{1f} =0.85 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =1.42m/s per il v. che sta davanti;
oppure:
v_{1f} =1.31 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =0.74m/s per il v. che sta davanti;
La seconda coppia di valori è priva di significato: se, prima della separazione, i due vagoni avevano la medesima velocità non si può avere, dopo, che sia $v_{1f} > v_{2f}$

1)

Un treno che viaggia alla velocità v_0 di 100km/h viene frenato in modo che la sua velocità v si riduce del 10% nel primo intervallo di tempo Δt di 40s.

d) Calcolare la sua velocità dopo altri 80s, ipotizzando che, nell'intero periodo di 120s, la decelerazione sia proporzionale alla velocità;
e) Trovare un'espressione per la forza frenante in N/t_{massa} del treno;
f) Trovare la potenza che viene dissipata all'istante finale dell'intero periodo, assumendo che il treno abbia una massa di 500t.

a) – Essendo la decelerazione proporzionale alla velocità, deve essere:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{da cui:} \quad \frac{dv}{v} = -kdt \qquad \textbf{(1)}$$

Integrando:

$$\log v\Big|_{v_0}^{v_f} = -k\left(t_f - t_0\right)$$
$$\log \frac{v_0}{v_f} = k\left(t_f - t_0\right) \qquad \textbf{(2)}$$

in cui è v_0=100, v_f=0.9v_0=90, (t_f-t_0)=40.
Si può quindi ricavare:

$$k = \frac{\log\left(v_0/v_f\right)}{\left(t_f - t_0\right)} = \frac{\log(100/90)}{40} = \frac{0.10536}{40} = 0.0026340$$

Pertanto, dalla seconda delle (2), si ha che, dopo l'intervallo di tempo di 120s, la velocità finale sarà di:

$$v_f = v_0 e^{-k\left(t_f - t_0\right)} = 100e^{-0.002634*120} = 72.90\left[\frac{km}{h}\right]$$

b)

Indicando con F_w la forza frenante, e in assenza di altre forze esterne, deve essere; e, per unità di massa e tenendo conto della (1):

$$\frac{F_w}{m} = a = -kv = -0.002634v\left[\frac{m}{s^2}\right] = -0.002634v\left[\frac{N}{kg}\right] = -2.634v\left[\frac{N}{t}\right]$$

dove v deve essere espressa in m/s.

c)

Al termine dei 120s, quando il treno ha assunto la velocità v_f=72.9[km/h]=20.25[m/s], la forza frenante complessiva è:

$$F_w = 500 * (-2.634 * 20.25) = -26.7\ 10^3 [N]$$

e la potenza dissipata è:

$$P_w = F_w v_f = 26.7\ 10^3 * 20.25 = 541 [kW]$$

2)
a) Mostrare che il rendimento di una macchina battipalo (rapporto fra il lavoro utile compiuto nell'affondamento del palo e l'energia iniziale della testa battente), quando viene impiegata per conficcare un palo di date dimensioni, aumenta con la massa della testa, ipotizzando che non vi sia rimbalzo sulla testa del palo.
b) Un palo avente massa m_p=500kg viene conficcato nel terreno da una testa avente massa m_t=800kg che cade da un'altezza h=3m dalla testa del palo. Il palo penetra per una profondità s=6mm e non c'è rimbalzo. Trovare la forza resistente che si oppone alla penetrazione del palo, resistenza supposta costante, ed anche l'energia spesa nella deformazione della testa.

a)
Per la conservazione della quantità di moto deve essere:

$$m_t v_t = (m_p + m_t) v$$

essendo v la velocità comune a battente e palo dopo l'impatto.
Si ricava quindi:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t \qquad \textbf{(3)}$$

Inoltre tutta l'energia cinetica posseduta dalle due masse è utilizzata per compiere il lavoro utile, e pertanto questa sarà uguale al lavoro compiuto per conficcare il palo.
Si ha quindi:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2 \qquad \textbf{(4)}$$

e quindi il rendimento:

$$h = \frac{\frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2}{\frac{1}{2} m_t v_t^2} = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{v}{v_t}\right)^2 = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{m_t}{m_p + m_t}\right)^2 = \frac{m_t}{m_p + m_t}$$

sarà tanto maggiore quanto più grande è il valore di m_t.

b)
La velocità con cui la testa battente impatta la testa del palo è data da:

$$v_t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3} = 7.67 [m/s]$$

e quindi dalla (3) si ha:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t = \frac{800}{800 + 500} 7.67 = 4.72[m/s]$$

L'energia cinetica (4) avrà allora il valore:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t)v^2 = 0.5 \cdot 1300 \cdot 4.72^2 = 14480[Nm] \qquad \textbf{(5)}$$

e questa deve eguagliare il lavoro compiuto dalla forza resistente nell'avanzamento del palo che affonda, ossia deve essere T=R*s; si ricava quindi:

$$R = \frac{T}{s} = \frac{14480}{0.006} = 2413333[N] = 2.41[MN]$$

La differenza fra l'energia cinetica iniziale della testa T_t e il lavoro utile (5) sarà il lavoro di deformazione della testa del palo.
Poiché è:

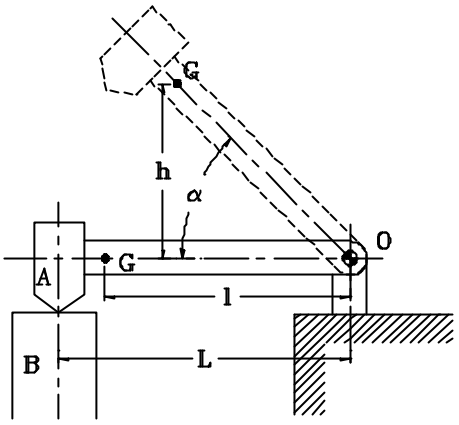
$$T_t = \frac{1}{2} m_t v_t^2 = 0.5 \cdot 800 \cdot 7.67^2 = 23532[Nm]$$

il lavoro di deformazione sarà:

$$L_w = T_t - T = 23532 - 14480 = 9052[J] \cong 9[kJ]$$

3)

E' mostrato in figura un martello oscillante, vincolato in O mediante una coppia rotoidale, la cui testa A è appoggiata sulla testa di un palo B in un punto distante orizzontalmente L=450 mm. Il martello, insieme al braccio OA ha una massa m_m= 25 kg; il suo baricentro si trova ad una distanza l=400 mm da O sull'orizzontale, ed il suo giratore d'inerzia k_0 intorno ad un asse passante per G, e perpendicolare al piano di figura, è di 75 mm. Il palo ha massa m_p= 135 kg.



Il martello colpisce, senza rimbalzo, la testa del palo partendo da una posizione ruotata, come indicato in figura, di un angolo α=45°.

Trovare la velocità angolare del martello immediatamente prima dell'impatto e la velocità lineare del palo subito dopo l'impatto. Si trascuri la resistenza offerta dal terreno in cui penetra il palo.

Indichiamo con ω_1 la velocità angolare di OA prima dell'impatto, con ω_2 la medesima dopo l'impatto e con v la velocità iniziale del palo dopo l'impatto.
Il momento d'inerzia del martello intorno all'asse passante per O è dato da:

$$I_O = I_G + m_m l^2 = m_m k_0^2 + m_m l^2 = m_m \left(k_0^2 + l^2\right)$$

dove è m_m= 25 *kg*, k_0=75 10^{-3} *m*, l=400 10^{-3} *m*.
Quindi è:

$$I_O = 25 \cdot \left(0.075^2 + 0.4^2\right) = 4.141 \left[kg\, m^2\right]$$

Ora, l'energia potenziale del martello nella posizione sollevata, con il baricentro a quota h=OGsinα, sarà eguale all'energia cinetica del martello stesso all'istante immediatamente prima dell'impatto.
Deve cioè essere:

$$m_m g h = \frac{1}{2} I_O w_1^2$$

da cui:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2m_m gh}{I_O}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 9.81 \cdot 0.4 \cdot \sin 45°}{4.141}} = 5.79 \left[rad / s\right]$$

Trascurando la resistenza del terreno, e tenendo conto che la reazione nella coppia rotoidale O non ha momento rispetto allo stesso punto O, per la conservazione del momento della quantità di moto, si può scrivere:

$$I_O w_1 = I_O w_2 + m_p vL = I_O w_2 + m_p w_2 L^2 = w_2 \left(I_O + m_p L^2\right)$$

essendo proprio $v = w_2 L$.
Si può quindi ricavare:

$$w_2 = \frac{I_O w_1}{I_O + m_p L^2} = \frac{w_1}{1 + m_p L^2 / I_O} = \frac{5.79}{1 + \left(135 \cdot 0.45^2\right) / 4.141} = 0.762 \left[rad / s\right]$$

e

$$v = w_2 L = 0.762 \cdot 0.45 = 0.343 \left[m / s\right]$$

4)

Un vagone che si muove su un tratto orizzontale di un binario urta un secondo vagone. I respingenti di entrambi hanno ciascuno la medesima costante elastica k=0.7MN/m.

Il primo vagone ha una massa m_1=10t e la sua velocità iniziale è v_{01}=1.8m/s, mentre il secondo vagone ha una massa m_2=15t con una velocità iniziale v_{02}=0.6m/s nello stesso verso del primo.

Trovare:

d) la velocità v comune ai due vagoni che si muovono insieme durante l'impatto;

e) l'energia cinetica perduta dal sistema, convertita in lavoro di deformazione di ciascuna molla dei respingenti;

f) le velocità, v_{1f} e v_{2f}, dei due vagoni dopo la separazione nella ipotesi che solamente la metà della energia immagazzinata nelle molle venga restituita.

b)

Per la conservazione della quantità di moto, essa calcolata prima dell'impatto deve essere eguale a quella calcolata nell'istante in cui i due vagoni hanno la medesima velocità. Deve cioè essere:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v$$

da cui:

$$v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 1.8 + 15 \cdot 0.6}{10 + 15} = 1.08 [m/s]$$

b)

L'energia cinetica perduta dal sistema e convertita in lavoro di compressione delle molle dei respingenti è data dalla differenza fra l'energia cinetica posseduta dai due vagoni prima dell'impatto e quella dell'intero sistema subito dopo l'impatto. Ossia:

$$L_w = T_1 + T_2 - T_{12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2$$

e quindi:

$$L_w = 0.5\left[10 \cdot 10^3 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 10^3 \cdot 0.6^2 - (10 + 15) \cdot 10^3 \cdot 1.08^2\right] =$$
$$= 0.5 \cdot 10^3 \left(10 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 0.6^2 - 25 \cdot 1.08^2\right) = 500 \cdot (32.4 + 5.4 - 29.16) =$$
$$= 500 \cdot 8.64 = 4.32 [kJ]$$

E questo deve eguagliare il lavoro di compressione delle 4 molle dei re-

spingenti che è da esprimere come $4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$ indicando con x appunto la compressione di ciascuna molla.
Si avrà allora:

$$L_w = 4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

da cui:

$$x = \sqrt{\frac{L_w}{2\cdot k}} = \sqrt{\frac{4320}{2\cdot 0.7\cdot 10^6}} = 10^{-3}\sqrt{3085.7} = 55.5\cdot 10^{-3}\,[m] = 55.5\,[mm]$$

c)
Dopo la separazione di due vagoni la loro energia cinetica totale dovrà essere quella che avevano prima della separazione aumentata della metà del lavoro di deformazione delle molle. Vale a dire:

$$T_{1f} + T_{2f} = T_{12} + \frac{1}{2}L_w$$

ossia:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}L_w$$

Contemporaneamente dovrà aversi la conservazione della quantità di moto, e quindi dovrà essere pure:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2)v$$

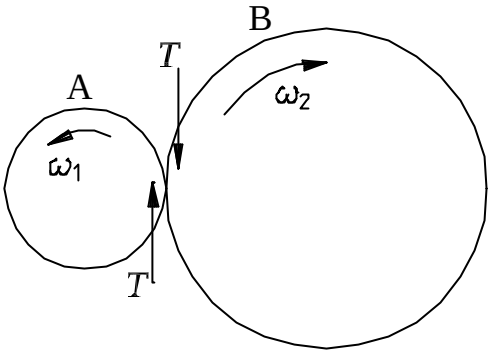
I valori di v_{1f} e di v_{2f} si possono ricavare quindi dal sistema:

$$\begin{cases} 10\cdot v_{1f}^2 + 15\cdot v_{2f}^2 = 25\cdot 1.08^2 + 4.32 = 33.48 \\ 10\cdot v_{1f} + 15\cdot v_{2f} = 25\cdot 1.08 = 27 \end{cases}$$

Si ottengono per la velocità le seguenti coppie di valori:
v_{1f} =0.85 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =1.42m/s per il v. che sta davanti;
oppure:
v_{1f} =1.31 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =0.74m/s per il v. che sta davanti;
La seconda coppia di valori è priva di significato: se, prima della separazione, i due vagoni avevano la medesima velocità non si può avere, dopo, che sia $v_{1f} > v_{2f}$. Trovare le condizioni per lo stop del vagone urtante.

5)

Due alberi paralleli possono essere connessi per mezzo di una coppia di ruote dentate, di cui una, avente un raggio r_A= 65mm, può scorrere lungo l'albero A su cui è calettata per imboccare l'altra, avente un raggio r_B=130mm, rigidamente calettata sull'albero B.



Prima dell'imbocco gli alberi A e B ruotano rispettivamente alla velocità n_{0A}=1400giri/1' ed n_{0B}=900giri/1' in verso opposto.

I momenti d'inerzia complessivi di A e di B sono equivalenti, rispettivamente ad una massa m_A=9kg a distanza d_A=75mm, e ad una massa m_B=36kg a distanza d_B =130mm.

Calcolare la velocità n_A di A dopo l'imbocco e l'impulso tangenziale *T*, in Ns, agente sui denti delle ruote.

I momenti d'inerzia effettivi di A e di B sono dati da:

$$I_A = m_A d_A^2 = 9 \cdot 0.075^2 = 0.0506 \left[kg \cdot m^2\right]$$
$$I_B = m_B d_B^2 = 36 \cdot 0.13^2 = 0.608 \left[kg \cdot m^2\right]$$

L'impulso T agisce in modo da incrementare la velocità di A e diminuire quella di B; il momento dell'impulso equivale alla variazione della quantità di moto del sistema.
Deve pertanto essere:

$$\begin{aligned} Td_A &= I_A\left(w_A - w_{0A}\right) \\ Td_B &= -I_B\left(w_B - w_{0B}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

da cui si può ricavare:

$$\frac{d_A}{d_B} = -\frac{I_A\left(w_A - w_{0A}\right)}{I_B\left(w_B - w_{0B}\right)} = -\frac{I_A\left(n_A - n_{0A}\right)}{I_B\left(n_B - n_{0B}\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

ossia:

$$\frac{65}{130} = -\frac{0.0506\left(n_A - 1400\right)}{0.608\left(n_B - 900\right)}$$

Poiché il rapporto fra le velocità finali di A e di B è dato dal rapporto di trasmissione che vale:

$$t = \frac{n_B}{n_A} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{65}{130} = 0.5 \qquad \textbf{(3)}$$

la velocità finale di A si avrà dalla (2), scrivendo:

$$\frac{65}{130}\frac{0.608}{0.0506} = 6.008 = -\frac{n_A - 1400}{0.5n_A - 900}$$

e quindi:

$$3.004n_A - 5407.2 = 1400 - n_A$$
$$4.004n_A = 6807.2$$

da cui:

$$n_A = 1700[\text{giri / min}]$$
$$n_B = 850[\text{giri / min}]$$

Il valore di n_A, sostituito nella prima delle (1), consente di ricavare il valore dell'impulso tangenziale *T*, ossia:

$$T = \frac{I_A(w_A - w_{0A})}{d_A} = \frac{I_A(n_A - n_{0A})\frac{p}{30}}{d_A}$$

e quindi:

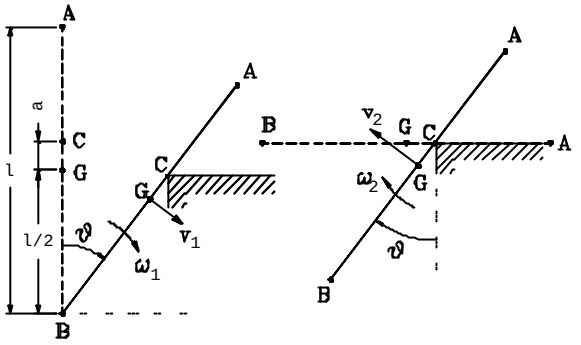
$$T = \frac{0.0506(1700 - 1400)\frac{p}{30}}{0.065} = 24.46[N \cdot s]$$

6)

Una trave AB, rigida e uniforme, di lunghezza l=6m, è tenuta verticalmente con la estremità B a contatto del suolo.

L'estremità A viene abbandonata e la trave cade ruotando intorno al punto B che rimane nella sua posizione originaria.

Un punto C della stessa trave, situato a distanza l_1=3,6m dalla estremità B, colpisce lo spigolo di un gradino.



Dopo l'urto l'asta ruota sullo spigolo del gradino senza strisciare.

Determinare l'altezza del gradino se la trave, ruotando, si dispone momentaneamente sul gradino nella configurazione orizzontale.

Siano ω_1 ed ω_2 le velocità angolare della trave immediatamente prima e immediatamente dopo il contatto con il gradino, e, analogamente, con v_1 e v_2 le velocità del suo baricentro G.

Durante la rotazione della trave si ha la trasformazione della sua energia potenziale in energia cinetica e viceversa; durante la caduta (rotazione intorno a B) si ha la trasformazione della energia potenziale in energia cinetica e quindi, se indichiamo con ϑ l'angolo della trave rispetto alla verticale, sarà, istante per istante:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos J)=\frac{1}{2}I_B w_1^2 \qquad \textbf{(1)}$$

dove è:

$$I_B = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Dalla (1) si ricava quindi:

$$w_1^2 = \frac{mgl(1-\cos J)}{I_B} = \frac{3g(1-\cos J)}{l}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos J)} \qquad \textbf{(2)}$$

Di contro, dopo l'urto, durante la rotazione intorno al punto C a contatto con lo spigolo del gradino, sarà l'energia cinetica posseduta dalla trave a trasformarsi in energia potenziale; sarà allora:

$$\frac{1}{2} I_C w_2^2 = mga \cos J \qquad \textbf{(3)}$$

dove è:

$$a = CG = l_1 - l/2 = 3.6 - 3 = 0.6[m]$$

e:

$$I_c = I_G + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + ma^2 = m\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)$$

Pertanto la (3) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right) w_2^2 = ga \cos J$$

da cui:

$$w_2^2 = \frac{ga \cos J}{\frac{l^2}{24} + \frac{a^2}{2}} = \frac{24ga \cos J}{l^2 + 12a^2}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{24ga \cos J}{l^2 + 12a^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

7)

Un vagone ferroviario di massa m=20t, e che viaggia alla velocità v=6.5km/h, va ad urtare i respingenti di un binario morto.

I respingenti esercitano una forza iniziale di 22.5kN che aumenta uniformemente di 60 kN/m durante la compressione.

Trascurando qualsiasi forma di perdita di energia durante l'impatto, trovare il valore massimo della compressione delle molle dei respingenti, ed il tempo necessario affinché il vagone si fermi.