Dinamica dell'urto

Se la velocità di un punto materiale di massa *m*, in un intervallo di tempo infinitamente piccolo, per effetto di una forza $\vec{F}$ che nello stesso tempo è passata da un valore finito ad un valore infinito, si è modificata in modo sensibile e discontinuo, passando da un valore precedente $\vec{u}$ ad un nuovo valore $\vec{v}$, diremo che il moto della massa è *impulsivo* per effetto dell'**impulso** della forza $\vec{F}$.

Impulso

L'impulso $\vec{F}^*$ di una forza $\vec{F}$, agente per un tempo Δt (piccolissimo) su un corpo di massa *m*, è, quindi, quell'azione che, nell'intervallo di tempo Δt è capace di modificare la velocità della massa di un certo valore Δv finito e non nullo.
Dovrà essere quindi:

$$\vec{F}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt = m\Delta v \qquad \textbf{(1)}$$

Poichè tale limite deve necessariamente essere non nullo, e quindi, poiché $\Delta t \to 0$, deve essere $\vec{F} \to \infty$.
Fissate queste condizioni, si potrà allora scrivere:

$$\vec{F}^* = m(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \qquad \textbf{(2)}$$

L'impulso di una forza è uguale alla variazione della quantità di moto

Nelle medesime condizioni la variazione di energi cinetica che subisce la massa *m* vale:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m(v^2 - u^2) = \frac{1}{2} m(\vec{v} - \vec{u}) \times (\vec{v} + \vec{u})$$

ed allora, tenndo conto della (2), avremo:

$$T_2 - T_1 = \vec{F}^* \times \frac{\vec{v} + \vec{u}}{2}$$

potendosi concludere che **la variazione di energia cinetica subita dalla massa *m* per effetto di un urto è pari al prodotto scalare dell'impulso della forza per la media aritmetica delle velocità anteriori e posteriori all'urto**.

Impulso angolare

In modo analogo si può definire l'impulso angolare $\vec{M}^*$ di un momento (coppia) $\vec{M}$, agente per un tempo infinitesimo Δt (piccolissimo) su un corpo di momento d'inerzia J, quell'azione che, nell'intervallo di tempo Δt è capace di modificare la velocità angolare del corpo di un certo valore $\Delta\omega$ finito e non nullo.
Sarà:

$$\vec{M}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \int_0^{\Delta t} \vec{M} dt = J\,\Delta w \qquad \textbf{(1')}$$

Se, nello stesso intervallo di tempo $\Delta t \to 0$, la massa ha modificato la sua velocità angolare dal valore $\vec{w}_1$ al valore $\vec{w}_2$, dovrà pure essere:

$$\vec{M}^* = J(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 \qquad \textbf{(3)}$$

L'impulso del momento di una forza (coppia) è uguale alla variazione del momento della quantità di moto

Se una forza di tipo impulsivo agisce su un corpo, provocandone la rotazione, il momento della quantità di moto del corpo intorno alla retta di applicazione della forza non varia negli istanti precedenti e successivi all'urto; la forza, infatti, non ha momento rispetto alla propria retta di applicazione.

La (2) e la (3) sono le equazioni cardinali del moto impulsivo.

Urto fra corpi elastici (urto centrale)

Due masse m_1 ed m_2, si muovono, su traiettoria rettilinea, rispettivamente con le velocità u_1 ed u_2 parallele fra loro.
Se le masse sono completamente anelastiche, dopo l'urto, assumeranno entrambe la medesima velocità v.
Essendo valido il principio di azione e reazione, l'impulso delle forze che si scambiano le due masse sono equali ed opposti; e pertanto:

$$\vec{F}_1^{\,*} = m_1(\vec{v} - \vec{u}_1) = -\vec{F}_2^{\,*} = -m_2(\vec{v} - \vec{u}_2)$$

Ne segue:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

Si conserva quindi la quantità di moto complessiva del sistema.
Se, invece, le masse sono elastiche dopo l'urto si separeranno: la loro velocità relativa dopo l'urto, cambiata di segno, starà in un rapporto costan-

te e con la velocità relativa prima dell'urto, ossia:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -e(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \qquad \textbf{(4)}$$

mentre rimane comunque costante la quantità di moto complessiva:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad \textbf{(5)}$$

Dalla (4) e (5) si potranno ricavare le velocità finali v_1 e v_2, avendosi in generale:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{m_2(1+e)\vec{u}_2 + (m_1 - em_2)\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2 &= \frac{m_1(1+e)\vec{u}_1 + (m_2 - em_1)\vec{u}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

Il fattore *e*, il cui valore è compreso fra 0 ed 1, prende il nome di **coefficiente di restituzione**, e consente di gestire tramite la (1) i vari casi possibili fra urto completamente anelastico $e = 0 \;\rightarrow\; \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} = \frac{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(7)}$$

ed urto totalmente elastico $e = 1 \;\rightarrow\; \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \frac{2m_2\vec{u}_2 + (m_1 - m_2)\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2 &= \frac{2m_1\vec{u}_1 + (m_2 - m_1)\vec{u}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \qquad \textbf{(8)}$$

Casi particolari.

a) urto anelastico (e=0) di masse uguali (m_1=m_2=m)
Dalla (7) si ha:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v} = \frac{m(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{2m} = \frac{\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{2}$$

Allora:
- se le velocità delle due masse prima dell'urto sono eguali ed opposte, la velocità dopo l'urto sarà nulla per entrambe:
- se era $\vec{u}_2 = 0$, le due masse si sposteranno di conserva con velocità $\vec{v} = \frac{\vec{u}_1}{2}$;

b) urto anelastico (e=0) di una massa m_1 contro un ostacolo fisso ($m_2=8$, $u_2=0$)
Sempre dalla (7), dividendo numeratore e denominatore per m_2 e sostituendo i valori, si ha:

$$\vec{v} = \frac{\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1 + \vec{u}_2}{\frac{m_1}{m_2}+1} = 0$$

La massa m_1 si ferma sull'ostacolo, qualunque sia la sua velocità precedente l'urto.

c) urto totalmente elastico (e=1) di masse uguali ($m_1=m_2=m$).
Dalla (8) si ha:

$$\vec{v}_1 = \frac{2m\vec{u}_2}{2m} = \vec{u}_2$$
$$\vec{v}_2 = \frac{2m\vec{u}_1}{2m} = \vec{u}_1$$

Nell'urto, quindi le due masse si scambiano le velocità che avevano prima dell'urto.

d) urto totalmente elastico (e=1) di una massa m_1 contro un ostacolo fisso ($m_2=8$, $u_2=0$).

Ancora dalla (8), dividendo numeratore e denominatore per m_2 e sostituendo i valori, si ha:

$$\vec{v}_1 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}-1\right)\vec{u}_1}{\frac{m_1}{m_2}+1} = -\vec{u}_1 \qquad \left[\vec{v}_2 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1}{\frac{m_1}{m_2}+1} = 0\right]$$

Quindi la massa m_1, rimbalza sull'ostacolo con la medesima velocità che aveva prima dell'urto.

1)

a) Mostrare che il rendimento di una macchina battipalo (rapporto fra il lavoro utile compiuto nell'affondamento del palo e l'energia iniziale della testa battente), quando viene impiegata per conficcare un palo di date dimensioni, aumenta con la massa della testa, ipotizzando che non vi sia rimbalzo sulla testa del palo.

b) Un palo avente massa m_p=500kg viene conficcato nel terreno da una testa avente massa m_t=800kg che cade da un'altezza h=3m dalla testa del palo. Il palo penetra per una profondità s=6mm e non c'è rimbalzo. Trovare la forza resistente che si oppone alla penetrazione del palo, resistenza supposta costante, ed anche l'energia spesa nella deformazione della testa.

a)

Per la conservazione della quantità di moto deve essere:

$$m_t v_t = (m_p + m_t) v$$

essendo v la velocità comune a battente e palo dopo l'impatto.
Si ricava quindi:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t \qquad \textbf{(3)}$$

Inoltre tutta l'energia cinetica posseduta dalle due masse è utilizzata per compiere il lavoro utile, e pertanto questa sarà uguale al lavoro compiuto per conficcare il palo.
Si ha quindi:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2 \qquad \textbf{(4)}$$

e quindi il rendimento:

$$h = \frac{\frac{1}{2}(m_p + m_t) v^2}{\frac{1}{2} m_t v_t^2} = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{v}{v_t}\right)^2 = \frac{m_p + m_t}{m_t}\left(\frac{m_t}{m_p + m_t}\right)^2 = \frac{m_t}{m_p + m_t}$$

sarà tanto maggiore quanto più grande è il valore di m_t.

b)

La velocità con cui la testa battente impatta la testa del palo è data da:

$$v_t = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 3} = 7.67 [m/s]$$

e quindi dalla (3) si ha:

$$v = \frac{m_t}{m_p + m_t} v_t = \frac{800}{800 + 500} 7.67 = 4.72[m/s]$$

L'energia cinetica (4) avrà allora il valore:

$$T = \frac{1}{2}(m_p + m_t)v^2 = 0.5 \cdot 1300 \cdot 4.72^2 = 14480[Nm] \qquad \textbf{(5)}$$

e questa deve eguagliare il lavoro compiuto dalla forza resistente nell'avanzamento del palo che affonda, ossia deve essere T=R*s; si ricava quindi:

$$R = \frac{T}{s} = \frac{14480}{0.006} = 2413333[N] = 2.41[MN]$$

La differenza fra l'energia cinetica iniziale della testa T_t e il lavoro utile (5) sarà il lavoro di deformazione della testa del palo.
Poiché è:

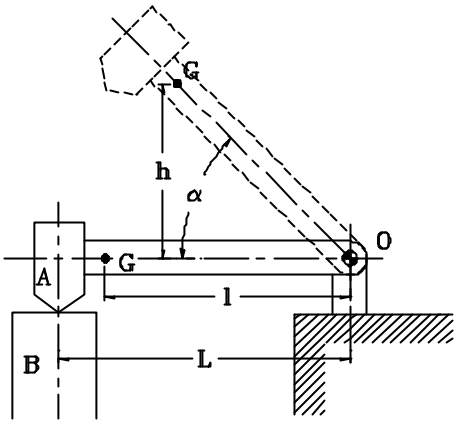
$$T_t = \frac{1}{2} m_t v_t^2 = 0.5 \cdot 800 \cdot 7.67^2 = 23532[Nm]$$

il lavoro di deformazione sarà:

$$L_w = T_t - T = 23532 - 14480 = 9052[J] \cong 9[kJ]$$

2)

E' mostrato in figura un martello oscillante, vincolato in O mediante una coppia rotoidale, la cui testa A è appoggiata sulla testa di un palo B in un punto distante orizzontalmente L=450 mm. Il martello, insieme al braccio OA ha una massa m_m= 25 kg; il suo baricentro si trova ad una distanza l=400 mm da O sull'orizzontale, ed il suo giratore d'inerzia k_0 intorno ad un asse passante per G, e perpendicolare al piano di figura, è di 75 mm. Il palo ha massa m_p= 135 kg.



Il martello colpisce, senza rimbalzo, la testa del palo partendo da una posizione ruotata, come indicato in figura, di un angolo α=45°.

Trovare la velocità angolare del martello immediatamente prima dell'impatto e la velocità lineare del palo subito dopo l'impatto. Si trascuri la resistenza offerta dal terreno in cui penetra il palo.

Indichiamo con ω_1 la velocità angolare di OA prima dell'impatto, con ω_2 la medesima dopo l'impatto e con v la velocità iniziale del palo dopo l'impatto.
Il momento d'inerzia del martello intorno all'asse passante per O è dato da:

$$I_O = I_G + m_m l^2 = m_m k_0^2 + m_m l^2 = m_m \left(k_0^2 + l^2\right)$$

dove è m_m= 25 *kg*, k_0=75 10^{-3} *m*, l=400 10^{-3} *m*.
Quindi è:

$$I_O = 25 \cdot \left(0.075^2 + 0.4^2\right) = 4.141 \left[kg\, m^2\right]$$

Ora, l'energia potenziale del martello nella posizione sollevata, con il baricentro a quota h=OGsinα, sarà eguale all'energia cinetica del martello stesso all'istante immediatamente prima dell'impatto.
Deve cioè essere:

$$m_m g h = \frac{1}{2} I_O w_1^2$$

da cui:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2m_m gh}{I_O}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 9.81 \cdot 0.4 \cdot \sin 45°}{4.141}} = 5.79 \left[rad / s \right]$$

Trascurando la resistenza del terreno, e tenendo conto che la reazione nella coppia rotoidale O non ha momento rispetto allo stesso punto O, per la conservazione del momento della quantità di moto, si può scrivere:

$$I_O w_1 = I_O w_2 + m_p v L = I_O w_2 + m_p w_2 L^2 = w_2 \left(I_O + m_p L^2 \right)$$

essendo proprio $v = w_2 L$.
Si può quindi ricavare:

$$w_2 = \frac{I_O w_1}{I_O + m_p L^2} = \frac{w_1}{1 + m_p L^2 / I_O} = \frac{5.79}{1 + \left(135 \cdot 0.45^2 \right) / 4.141} = 0.762 \left[rad / s \right]$$

e

$$v = w_2 L = 0.762 \cdot 0.45 = 0.343 \left[m / s \right]$$

3)

Un vagone che si muove su un tratto orizzontale di un binario urta un secondo vagone. I respingenti di entrambi hanno ciascuno la medesima costante elastica k=0.7MN/m.

Il primo vagone ha una massa m_1=10t e la sua velocità iniziale è v_{01}=1.8m/s, mentre il secondo vagone ha una massa m_2=15t con una velocità iniziale v_{02}=0.6m/s nello stesso verso del primo.

Trovare:

a) la velocità v comune ai due vagoni che si muovono insieme durante l'impatto;
b) l'energia cinetica perduta dal sistema, convertita in lavoro di deformazione di ciascuna molla dei respingenti;
c) le velocità, v_{1f} e v_{2f}, dei due vagoni dopo la separazione nella ipotesi che solamente la metà della energia immagazzinata nelle molle venga restituita.

a)

Per la conservazione della quantità di moto, essa calcolata prima dell'impatto deve essere eguale a quella calcolata nell'istante in cui i due vagoni hanno la medesima velocità. Deve cioè essere:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2)v \qquad \textbf{(1)}$$

da cui:

$$v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 1.8 + 15 \cdot 0.6}{10 + 15} = 1.08\,[m/s]$$

b)

L'energia cinetica perduta dal sistema e convertita in lavoro di compressione delle molle dei respingenti è data dalla differenza fra l'energia cinetica posseduta dai due vagoni prima dell'impatto e quella dell'intero sistema subito dopo l'impatto. Ossia:

$$L_w = T_1 + T_2 - T_{12} = \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \qquad \textbf{(2)}$$

e quindi:

$$L_w = 0.5\left[10 \cdot 10^3 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 10^3 \cdot 0.6^2 - (10 + 15) \cdot 10^3 \cdot 1.08^2\right] =$$
$$= 0.5 \cdot 10^3 \left(10 \cdot 1.8^2 + 15 \cdot 0.6^2 - 25 \cdot 1.08^2\right) = 500 \cdot (32.4 + 5.4 - 29.16) =$$
$$= 500 \cdot 8.64 = 4.32\,[kJ]$$

E questo deve eguagliare il lavoro di compressione delle 4 molle dei re-

spingenti che è da esprimere come $4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$ indicando con x appunto la compressione di ciascuna molla.
Si avrà allora:

$$L_w = 4\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

da cui:

$$x = \sqrt{\frac{L_w}{2\cdot k}} = \sqrt{\frac{4320}{2\cdot 0.7\cdot 10^6}} = 10^{-3}\sqrt{3085.7} = 55.5\cdot 10^{-3}\,[m] = 55.5[mm]$$

c)
Dopo la separazione di due vagoni la loro energia cinetica totale dovrà essere quella che avevano prima della separazione aumentata della metà del lavoro di deformazione delle molle. Vale a dire:

$$T_{1f} + T_{2f} = T_{12} + \frac{1}{2}L_w$$

ossia:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}L_w \qquad \textbf{(3)}$$

Contemporaneamente dovrà aversi la conservazione della quantità di moto, e quindi dovrà essere pure:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = (m_1 + m_2)v \qquad \textbf{(4)}$$

I valori di v_{1f} e di v_{2f} si possono ricavare quindi dal sistema di (3) e (4):

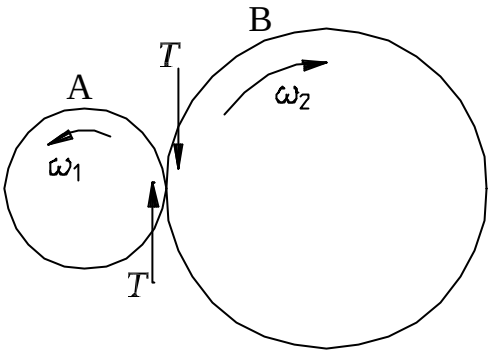
$$\begin{cases} 10\cdot v_{1f}^2 + 15\cdot v_{2f}^2 = 25\cdot 1.08^2 + 4.32 = 33.48 \\ 10\cdot v_{1f} + 15\cdot v_{2f} = 25\cdot 1.08 = 27 \end{cases}$$

Si ottengono per la velocità le seguenti coppie di valori:
v_{1f} =0.85 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =1.42m/s per il v. che sta davanti;
oppure:
v_{1f} =1.31 m/s per il v. che sta dietro;
v_{2f} =0.74m/s per il v. che sta davanti;
La seconda coppia di valori è priva di significato: se, prima della separazione, i due vagoni avevano la medesima velocità non si può avere, dopo, che sia $v_{1f} > v_{2f}$.

Si possono, in modo analogo, trovare le condizioni perché il vagone urtante si fermi.

4)

Due alberi paralleli possono essere connessi per mezzo di una coppia di ruote dentate, di cui una, avente un raggio r_A= 65mm, può scorrere lungo l'albero A su cui è calettata per imboccare l'altra, avente un raggio r_B=130mm, rigidamente calettata sull'albero B.



Prima dell'imbocco gli alberi A e B ruotano rispettivamente alla velocità n_{0A}=1400giri/1' ed n_{0B}=900giri/1' in verso opposto.

I momenti d'inerzia complessivi di A e di B sono equivalenti, rispettivamente ad una massa m_A=9kg a distanza d_A=75mm, e ad una massa m_B=36kg a distanza d_B =130mm.

Calcolare la velocità n_A di A dopo l'imbocco e l'impulso tangenziale *T*, in Ns, agente sui denti delle ruote.

I momenti d'inerzia effettivi di A e di B sono dati da:

$$I_A = m_A d_A^2 = 9 \cdot 0.075^2 = 0.0506 \left[kg \cdot m^2\right]$$
$$I_B = m_B d_B^2 = 36 \cdot 0.13^2 = 0.608 \left[kg \cdot m^2\right]$$

L'impulso T agisce in modo da incrementare la velocità di A e diminuire quella di B; il momento dell'impulso equivale alla variazione della quantità di moto del sistema.
Deve pertanto essere:

$$\begin{aligned} Td_A &= I_A\left(w_A - w_{0A}\right) \\ Td_B &= -I_B\left(w_B - w_{0B}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

da cui si può ricavare:

$$\frac{d_A}{d_B} = -\frac{I_A\left(w_A - w_{0A}\right)}{I_B\left(w_B - w_{0B}\right)} = -\frac{I_A\left(n_A - n_{0A}\right)}{I_B\left(n_B - n_{0B}\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

ossia:

$$\frac{65}{130} = -\frac{0.0506(n_A - 1400)}{0.608(n_B - 900)}$$

Poiché il rapporto fra le velocità finali di A e di B è dato dal rapporto di trasmissione che vale:

$$t = \frac{n_B}{n_A} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{65}{130} = 0.5 \qquad \textbf{(3)}$$

la velocità finale di A si avrà dalla (2), scrivendo:

$$\frac{65}{130}\frac{0.608}{0.0506} = 6.008 = -\frac{n_A - 1400}{0.5n_A - 900}$$

e quindi:

$$3.004n_A - 5407.2 = 1400 - n_A$$
$$4.004n_A = 6807.2$$

da cui:

$$n_A = 1700\,[\text{giri / min}]$$
$$n_B = 850\,[\text{giri / min}]$$

Il valore di n_A, sostituito nella prima delle (1), consente di ricavare il valore dell'impulso tangenziale *T*, ossia:

$$T = \frac{I_A(w_A - w_{0A})}{d_A} = \frac{I_A(n_A - n_{0A})\dfrac{p}{30}}{d_A}$$

e quindi:

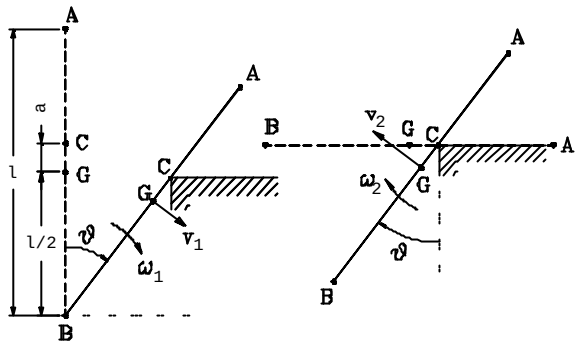
$$T = \frac{0.0506(1700 - 1400)\dfrac{p}{30}}{0.065} = 24.46\,[N \cdot s]$$

5)

Una trave AB, rigida e uniforme, di lunghezza l=6m, è tenuta verticalmente con la estremità B a contatto del suolo.

L'estremità A viene abbandonata e la trave cade ruotando intorno al punto B che rimane nella sua posizione originaria.

Un punto C della stessa trave, situato a distanza l_1=3,6m dalla estremità B, colpisce lo spigolo di un gradino.



Dopo l'urto l'asta ruota sullo spigolo del gradino senza strisciare.

Determinare l'altezza del gradino se la trave, ruotando, si dispone momentaneamente sul gradino nella configurazione orizzontale.

Siano ω_1 ed ω_2 le velocità angolare della trave immediatamente prima e immediatamente dopo il contatto con il gradino, e, analogamente, con v_1 e v_2 le velocità del suo baricentro G.

Durante la rotazione della trave si ha la trasformazione della sua energia potenziale in energia cinetica e viceversa; durante la caduta (rotazione intorno a B) si ha la trasformazione della energia potenziale in energia cinetica e quindi, se indichiamo con ϑ l'angolo della trave rispetto alla verticale, sarà, istante per istante:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos J)=\frac{1}{2}I_B w_1^2 \qquad \textbf{(1)}$$

dove è:

$$I_B = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Dalla (1) si ricava quindi:

$$w_1^2 = \frac{mgl(1-\cos J)}{I_B} = \frac{3g(1-\cos J)}{l}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos J)} \qquad \textbf{(2)}$$

Di contro, dopo l'urto, durante la rotazione intorno al punto C a contatto con lo spigolo del gradino, sarà tutta l'energia cinetica posseduta dalla trave a doversi trasformare in energia potenziale, se la trave deve disporsi orizzontalmente; sarà allora:

$$\frac{1}{2} I_C w_2^2 = mga\cos J \qquad \textbf{(3)}$$

dove è:

$$a = CG = l_1 - l/2 = 3.6 - 3 = 0.6[m]$$

e:

$$I_c = I_G + ma^2 = \frac{1}{12} ml^2 + ma^2 = m\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)$$

Pertanto la (3) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right) w_2^2 = ga\cos J$$

da cui:

$$w_2^2 = \frac{ga\cos J}{\frac{l^2}{24} + \frac{a^2}{2}} = \frac{24ga\cos J}{l^2 + 12a^2} \qquad \textbf{(4)}$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{24ga\cos J}{l^2 + 12a^2}}$$

Contemporaneamente, durante l'urto, la variazione del momento della quantità di moto della trave, tra l'istante prima dell'urto e quello dopo, deve essere uguale al momento dell'impulso in C.

Ma, se come polo per il calcolo dei momenti si sceglie il proprio il punto C, il momento dell'impulso è nullo e quindi sarà pure nulla la differenza dei momenti delle quantità di moto.

Sarà pertanto, prendendo come positivo il verso orario,:

$$I_G w_1 - Q_1 \wedge a = I_G w_2 + Q_2 \wedge a \qquad \textbf{(5)}$$

ossia:

$$I_G w_1 - m v_1 \wedge a = I_G w_2 + m v_2 \wedge a$$

con:

$$v_1 = w_1 \frac{l}{2}$$
$$v_2 = w_2 a$$

Quindi la (5) si può scrivere come:

$$w_1 m\left(\frac{l^2}{12} - \frac{l}{2}a\right) = w_2 m\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)$$

dove ω_1 ed ω_2 hanno rispettivamente le espressioni (2) e (4) prima ricavate, e si perviene alla spressione finale:

$$\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos J)}\left(\frac{l^2}{12} - \frac{al}{2}\right) = \sqrt{\frac{24ga\cos J}{l^2+12a^2}}\left(\frac{l^2}{12} + a^2\right)$$

$$\therefore$$

$$\frac{l}{12}(l-6a)\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos J)} = \frac{1}{12}\left(l^2+12a^2\right)\sqrt{\frac{24ga\cos J}{l^2+12a^2}}$$

$$\therefore$$

$$3gl(l-6a)^2(1-\cos J) = 24ga\cos J\left(l^2+12a^2\right)$$

$$\therefore$$

$$3gl(l-6a)^2(1-\cos J) = 24ga\cos J\left(l^2+12a^2\right)$$

da cui:

$$\left[24a\left(l^2+12a^2\right) + 3l(l-6a)^2\right]\cos J = 3l(l-6a)^2$$

$$\therefore$$

$$\cos J = \frac{3l(l-6a)^2}{24a\left(l^2+12a^2\right) + 3l(l-6a)^2}$$

$$\therefore$$

$$\cos J = \frac{6(6-6\cdot 0.6)^2}{8\cdot 0.6\left(6^2+12\cdot 0.6^2\right) + 6(6-6\cdot 0.6)^2} = \frac{34.56}{228.096} = 0.15152$$

La condizione richiesta si otterrà quindi per ϑ=81°,29, e tale valore si verificherà se il gradino ha un'altezza:

$$h = AC\cdot\cos J = 3.6\cdot 0.15152 = 0.54545[m]$$

posto dal punto B a distanza:

$$d = AC\cdot\sin J = 3.6\cdot 0.9885 = 3.55844[m]$$

6)

Un vagone ferroviario di massa m=20t, e che viaggia alla velocità v=6.5km/h, va ad urtare i respingenti di un binario morto.

I respingenti esercitano una forza iniziale di F_0=22.5kN che aumenta uniformemente di k=60 kN/m durante la compressione.

Trascurando qualsiasi forma di perdita di energia durante l'impatto, trovare il valore massimo della compressione delle molle dei respingenti, ed il tempo necessario affinché il vagone si fermi.

L'equilibrio dinamico del vagone impone che debba essere:

$$F + F' = 0$$

ossia:

$$\begin{aligned} &-(F_0 + kx) - ma = 0 \\ &\therefore \\ &m\ddot{x} + kx = -F_0 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

e questa rappresenta l'equazione del moto del vagone, la quale può anche mettersi nella forma:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{F_0}{m} \\ &\therefore \\ &\ddot{x} + w_n^2 x = f \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

La soluzionegenerale è quindi del tipo:

$$x_g = A\cos w_n t + B\sin w_n t$$

con $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3}} = \sqrt{3} = 1.732\,[rad/s]$

mentre per la soluzione particolare si può porre che sia $x_p = \cos t = c$; il valore di c si può ricavare, per sostituzione nella seconda delle (2), da:

$$\begin{aligned} &0 + w_n^2 c = f \\ &\therefore \\ &c = \frac{f}{w_n^2} = -\frac{F_0}{m}\frac{m}{k} = -\frac{F_0}{k} = -\frac{22.5 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^3} = -0.375\,[m] \end{aligned}$$

La soluzione completa della (2) sarà data, allora, da:

$$x = A\cos w_n t + B\sin\, w_n t + \frac{f}{w_n^2} \qquad \textbf{(3)}$$

dove i coefficienti A e B si ricavano imponendo la condizione che, per t=0 sia x=0 e $\dot{x} = v = \frac{6.5\cdot 10^3}{3.6\cdot 10^3} = 1.806[m/s]$

Si ricava allora:

$$0 = A + \frac{f}{w_n^2}$$

$$\therefore$$

$$A = -\frac{f}{w_n^2} = \frac{F_0}{k} = 0.375[m]$$

e poi, derivando la (3), si ha:

$$\dot{x} = v = w_n B$$

$$\therefore$$

$$B = \frac{v}{w_n} = \frac{1.806}{1.732} = 1.043[m]$$

L'espressione della (3) e la sua derivata valgono quindi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{F_0}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{F_0}{k} \\ \dot{x} &= -\frac{F_0}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Ora, nell'istante in cui il vagone ha raggiunto la condizione di arresto, la sua velocità sarà nulla, e quindi dalla seconda delle (4) si può avere:

$$\dot{x} = 0$$

$$\therefore$$

$$\tan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = \frac{v}{F_0}\sqrt{km}$$

e ricavare il tempo di arresto:

$$t = \sqrt{\frac{m}{k}} \arctan\left(\frac{v}{F_0} \sqrt{km} \right) = \frac{1}{1.732} \arctan\left(\frac{1.806}{22.5 \cdot 10^3} \sqrt{60 \cdot 20 \cdot 10^6} \right) =$$

$$= \frac{\arctan(2.781)}{1.732} = \frac{1.226}{1.732} = 0.707 [s]$$

In tale lasso di tempo si verificherà la massima compressione delle molle dei respingenti (corrispondente allo spostamento del vagone) che si può ricavare dalla prima delle (4), sostituendovi il valore trovato per *t*.
Poiché è $w_n t = 1.732 \cdot 0.707 = 1.225 [rad]$, si ottiene in definitiva:

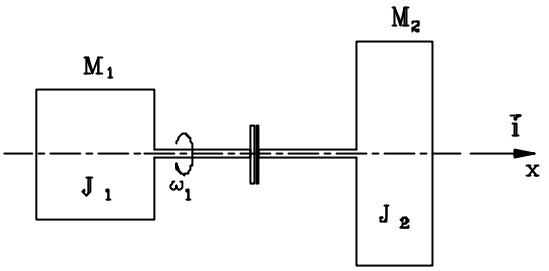
$$x = 0.375 \cos(1.225) + 1.043 \sin(1.225) - 0.375 = 0.127 + 0.981 - 0.375 =$$

$$= 0.733 [m]$$

7)
Un rotore M_1 di momento d'inerzia J_1 sta ruotando con velocità angolare ω_1; viene improvvisamente collegato, con un innesto a frizione, ad un secondo rotore M_2 di momento di inerzia J_2 inizialmente fermo.
Si trovi:

a) la velocità angolare ω comune ai due rotori dopo l'innesto;
b) l'energia dissipata durante la fase di innesto.

a)
Nell'operazione di innesto gli impulsi delle forze esterne hanno ovviamente momento nullo rispetto all'asse di rotazione.
Si ha invece dalla (3), per gli impulsi angolari:



$$\vec{M}^* = \vec{K}_2 - \vec{K}_1$$

Scegliendo come polo un punto qualsiasi dell'asse di rotazione, si ha per il primo rotore M_1:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = J_1(w - w_1)$$

e per il secondo rotore M_2:

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = J_2 w$$

Ora, poiché i due impulsi angolari devono essere eguali ed opposti, deve essere:

$$J_1(w - w_1) = -J_2 w$$

da cui si può ricavare:

$$w = \frac{J_1}{J_1 + J_2} w_1$$

Si vede che la velocità finale ω risulta minore della velocità iniziale.
b)
Consideriamo l'energia cinetica del sistema prima dell'innesto, e dopo l'innesto della frizione.
Prima dell'innesto vale:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 w_1^2$$

Dopo l'innesto vale:

$$T_2 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)w^2$$

ossia sostituendo il valore trovato per ω:

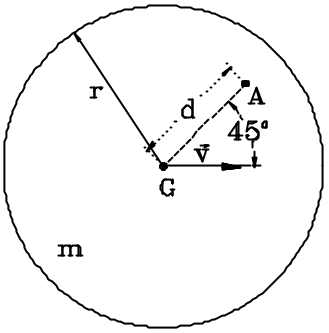
$$T_2 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\left(\frac{J_1}{J_1 + J_2}\right)^2 w_1^2 = \frac{1}{2}\frac{J_1^2}{J_1 + J_2}w_1^2$$

Ora il lavoro dissipato nella operazione di innesto della frizione, per il teorema dell'energia cinetica, è quello che ha provocato, in tale fase, la variazione di energia cinetica del sistema; tale differenza vale:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1^2}{J_1 + J_2} - J_1\right)w_1^2 = -\frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}w_1^2 = L^*$$

8)

Un disco omogeneo di massa m e raggio r si muove di moto traslatorio con velocità $\vec{v}$ su un piano orizzontale. Mentre il disco è in moto si fissa istantaneamente un suo punto A situato a distanza d su una radiale inclinata di 45° rispetto alla direzione di $\vec{v}$.
Si trovi la velocità angolare $\vec{w}$ con cui il disco ruota intorno ad A.



Le forze esterne che entrano in gioco mentre si fissa il punto A non possono avere momento rispetto alla normale al piano per A. Pertanto, se si indica con $\vec{n}$ il versore di tale retta, deve essere:

$$\left[\left(\vec{K}_A\right)_2 - \left(\vec{K}_A\right)_1\right]\times\vec{n} = 0$$

ossia:

$$\left[\left(\vec{K}_A^{(r)}\right)_2 - \left(\vec{K}_A^{(r)}\right)_1\right]\times\vec{n} + \left\{m(G-A)\wedge\left[\left(v_A\right)_2 - \left(v_A\right)_1\right]\right\}\times\vec{n} = 0$$

Quindi avremo per il primo addendo:

$$\left[\left(\vec{K}_A^{(r)}\right)_2 - \left(\vec{K}_A^{(r)}\right)_1\right]\times\vec{n} = J_A w$$

e contemporaneamente:

$$m(G-A)\wedge\left[\left(v_A\right)_2 - \left(v_A\right)_1\right]\times\vec{n} = md(0-v)\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}mdv$$

Quindi avremo:

$$J_A w - \frac{\sqrt{2}}{2}mdv = 0$$

e, tenendo conto che, per il teorema di Huyghens è:

$$J_A = J_G + md^2 = m\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right)$$

si ottiene:

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2J_A}mdv = \frac{\sqrt{2}dv}{r^2 + 2d^2}$$

Si osservi che il prodotto $d\sin 45° = d\sqrt{2}/2$ rappresenta la distanza del punto A dalla retta di applicazione del vettore $\vec{v}$. Pertanto si conclude

che la velocità angolare cercata sarà proporzionale proprio a questa distanza, oltre che, come è ovvio, dalla velocità di traslazione iniziale.

Se, invece, il disco, prima che venisse fissato il punto A, fosse stato dotato oltre che del moto traslatorio anche di un moto rotatorio intorno al punto G con velocità angolare $\vec{\Omega}$, si avrebbe:

$$J_A w - J_G \Omega - \frac{\sqrt{2}}{2} mdv = 0$$

da cui:

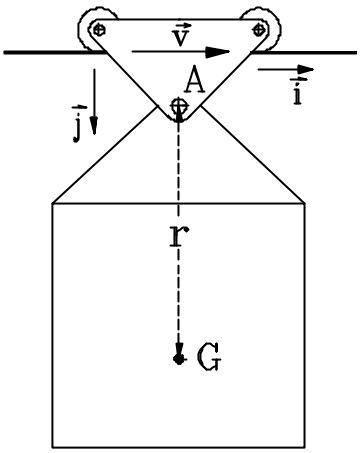
$$w = \frac{J_G \Omega + \frac{\sqrt{2}}{2} mdv}{J_A} = \frac{J_G \Omega + \frac{\sqrt{2}}{2} mdv}{J_G + md^2} = \frac{r^2 \Omega + \sqrt{2} dv}{r^2 + 2d^2}$$

9)

La cabina di una funivia mentre percorre un tratto della sua traiettoria, che può ritenersi orizzontale, viene istantaneamente frenata. Si determini la velocità angolare $\vec{w}$ della cabina immediatamente dopo l'arresto del carrello, e l'energia dissipata in tale operazione.

Si suppone che il baricentro della cabina stia sul piano verticale contenente sia il cavo che il punto A.

Sia J il momento d'inerzia della cabina, di massa m, rispetto alla retta di versore $\vec{k}$ (entrante) perpendicolare al piano di figura e passante per A.



Nell'operazione di frenata, gli impulsi delle forze esterne hanno momento nullo rispetto alla retta di versore $\vec{k}$ passante per il punto A. Dovrà quindi essere:

$$\left(\vec{K}_A\right)_2 - \left(\vec{K}_A\right)_1 = 0$$

ossia:

$$J(w - w_0) + m(G - A) \wedge \left[(v_A)_2 - (v_A)_1\right] = 0$$

dove è, però, $w_0 = 0$ e $(v_A)_2 = 0$.

Pertanto la precedente relazione, essendo r=AG, si riduce a:

$$Jw - mrv = 0$$

e quindi sarà:

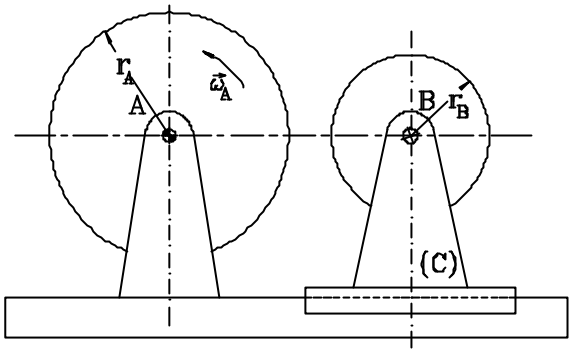
$$w = \frac{mrv}{J}$$

L'energia dissipata è data dalla variazione di energia cinetica subita dalla cabina nella operazione di frenatura.

Sarà cioè:

$$L^* = \frac{1}{2}Jw^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{mrv}{J}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{mr^2}{J}\right)$$

10)
Si consideri il sistema costituito da due volani (A) e (B) rispettivamente di raggi r_A ed r_B e massa m_A ed m_B. Il volano (A) sta ruotando con velocità angolare ω_A, mentre il volano (B) non ruota.
Tramite la slitta (C), il volano (B) viene spinto contro l'altro fino a quando sia cessato lo strisciamento nel contatto.
Trascurando l'attrito nei perni, si calcolino le rispettive velocità angolari dei due volani al termine dello strisciamento.



Inoltre, ipotizzando un coeffiente di attrito *f* nel contatto fra i due volani e che questi siano premuti da una forza costante F_n, si calcoli la durata della fase di strisciamento.

Al momento del contatto si ha fra i due volani una forza tangenziale costante $F_t = fF_n$, ed il suo impulso angolare dovrà eguagliare la variazione del momento della quantità di moto del volano su cui agisce.
Pertanto si avrà sul volano (A):

$$r_A \int_0^t F_t dt = J_A\left[(w_A)_2 - (w_A)_1\right] = \frac{m_A r_A^2}{2}\left[(w_A)_2 - (w_A)_1\right]$$

e sul volano (B):

$$r_B \int_0^t F_t dt = J_B\left[(w_B)_2 - (w_B)_1\right] = \frac{m_B r_B^2}{2}(w_B)_2$$

Ora, poiché i due impulsi devono essere eguali ed opposti, deve essere:

$$m_A r_A\left[(w_A)_2 - (w_A)_1\right] = -m_B r_B (w_B)_2$$

da cui:

$$(w_A)_2 = (w_A)_1 - \frac{m_B r_B}{m_A r_A}(w_B)_2$$

Inoltre, al termine della fase di strisciamento, fra le velocità angolari dei due volani deve susstire la relazione:

$$\frac{(w_A)_2}{(w_B)_2} = \frac{r_B}{r_A}$$

e quindi, da quest'ultima e dalla precedente, si può ricavare:

$$(w_A)_2 = (w_A)_1 - \frac{m_B r_B}{m_A r_A}\frac{r_A}{r_B}(w_A)_2 = (w_A)_1 - \frac{m_B}{m_A}(w_A)_2$$

$$(w_A)_2 = \frac{(w_A)_1}{1+\frac{m_B}{m_A}}$$

e poi:

$$(w_B)_2 = \frac{(w_A)_1}{1+\frac{m_B}{m_A}}\frac{r_A}{r_B}$$

Per calcolare la durata della fase di strisciamento si consideri, per esempio, l'equilibrio dinamico del volano (A) sottoposto alla coppia $C_A = fF_n r_A$.
Dovrà essere:

$$C_A = J_A \dot{w}_A = J_A \frac{dw_A}{dt}$$

e quindi anche, considerando che la coppia è costante e che si è in fase di decelerazione:

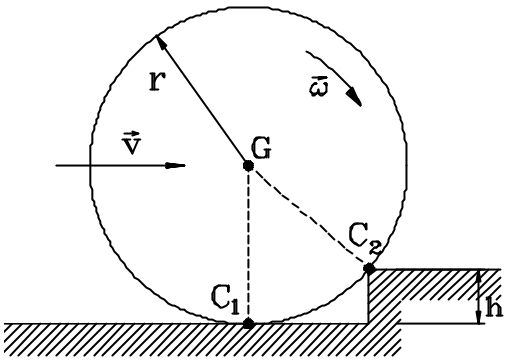
$$fF_n r_A t = -J_A[(w_A)_2 - (w_A)_1]$$

da cui:

$$t = J_A \frac{(w_A)_1 - (w_A)_2}{fF_n r_A}$$

Lo stesso risultato si otterrebbe considrndo l'equilibrio dinamico dell'altro volano.

11)
Un disco omogeneo e anelastico di massa m e raggio r, rotola senza strisciare su un piano orizzontale a velocità $\vec{v} = \text{cost}$; ad un dato istante urta un gradino di altezza *h* in un punto C_2.
Supponendo che le condizioni del contatto in C_2 siano tali da impedire qualsiasi strisciamento trovare quale deve essere il valore della velocità affinché il disco possa sormontare il gradino.



Immediatamente prima dell'urto la velocità angolare del disco vale:

$$w_1 = \frac{v}{r}$$

ed il momento della quantità di moto intorno a C_2 vale:

$$\vec{K}_1 = J_G \vec{w}_1 + (G - O) \wedge \vec{Q} \Rightarrow K_1 = \frac{mr^2}{2} w_1 + mv(r - h)$$

da cui:

$$K_1 = \frac{mrv}{2} + mvr - mvh = mv\left(\frac{3}{2}r - h\right)$$

Dopo l'urto, la velocità del centro G sarà data da:

$$\vec{v}_G = w_2 \wedge (G - C_2) \Rightarrow v_G = w_2 r$$

ed il momento della quantità di moto intorno a C_2 sarà:

$$K_2 = J_{C_2} w_2 = \left(\frac{mr^2}{2} + mr^2\right) w_2 = \frac{3}{2} mr^2 w_2$$

Ora, poiché l'impulso delle foze agenti durante l'urto non hanno momento ripetto al punto C_2, i due momenti delle quantità di moto prima calcolati saranno uguali; e pertanto sarà:

$$\frac{3}{2} mr^2 w_2 = mv\left(\frac{3}{2}r - h\right)$$

da cui:

$$w_2 = v\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{3}\frac{h}{r^2}\right)$$

Affinché, infine, il disco superi il gradino la sua energia cinetica dovrà essere maggiore della energia potenziale; ossia dovrà essere:

$$\frac{1}{2} J_{C_2} w_2^2 > mgh$$

e quindi:

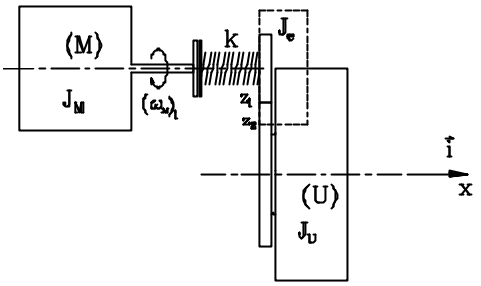
$$\frac{3}{4} mr^2 v^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{2h}{3r^2}\right)^2 > mgh$$

da cui:

$$v^2 > \frac{12ghr^2}{(3r-2h)^2} \Leftrightarrow v^2 > \frac{12gh}{\left(3-2\frac{h}{r}\right)^2}$$

11)

Lo schema di figura mostra un avviatore ad inerzia funzionante mediante un innesto a denti che può trasmettere coppia solo se questa è concorde con il verso di rotazione. La massa volanica (M) di momento d'inerzia J_M è direttamente collegata all'albero della trasmissione, mentre il collegamento della seconda massa volanica (U), di momento d'inerzia J_U, avviene attraverso una coppia di ruote dentate con rapporto di trasmissione z_1/z_2 ed una molla di torsione di costante elastica k.



Si mette in movimento la prima massa volanica fino alla velocità angolare $(\omega_M)_1$ innestando poi la trasmissione.
Trascurando tutte le perdite e l'inerzia di tutte le parti diverse dai due volani, come pure l'energia supplementare necessaria a portare il primo volano alla sua velocità iniziale, si trovi la velocità dei due volani dopo l'operazione di avviamento e la coppia massima trasmessa dall'innesto.

E' possibile, anzitutto, sostituire il secondo volano con un altro, direttamente connesso all'albero della ruota dentata z_1, di momento d'inerzia equivalente J_e; il nuovo momento d'inerzia si ha uguagliando le energie cinetiche dei due volani. Dovrà cioè essere:

$$\frac{1}{2} J_e w_e^2 = \frac{1}{2} J_u w_u^2$$

Tenendo conto che $\frac{w_e}{w_u} = \frac{z_2}{z_1}$ dalla precedente si ha:

$$J_e = J_U \frac{w_u^2}{w_e^2} = J_U \frac{z_1^2}{z_2^2}$$

Adesso, non essendovi coppie esterne applicate al sistema, devono essere uguali i momenti delle quantità di moto prima e subito dopo l'innesto. Ossia:

$$J_M (w_M)_1 + J_e (w_e)_1 = (J_M + J_e) w$$

Da questa, tenendo conto che $(\omega_e)_1=0$, si ha:

$$w = \frac{J_M}{J_M + J_e}(w_M)_1$$

che rappresenta la velocità angolare comune ai due volani ad innesto avvenuto, minore della velocità iniziale del volano (M) essendo il rapporto a fattore <1.

Il lavoro di deformazione della molla, inoltre, deve eguagliare la differenza di energia cinetica del sistema che si ha prima e dopo l'innesto; per questo deve essere:

$$\frac{1}{2}J_M(w_M)_1^2 - \frac{1}{2}(J_M + J_e)w^2 = \frac{1}{2}CJ = \frac{1}{2}kJ^2$$

dove ϑ e l'angolo massimo di torsione della molla.
Si può quindi ricavare:

$$J = \sqrt{\frac{J_M(w_M)_1^2 - (J_M + J_e)w^2}{k}}$$

Si consideri, infine, che, per ciascun volano, non essendovi perdite, la variazione del momento della quantità di moto che si ha durante la fase di torsione della molla deve eguagliare quella che si ha nella fase in cui la molla restituisce la sua energia elastica.
Quindi si deve avere:

- per il primo volano $J_M[w - (w_M)_1] = J_M[(w_M)_2 - w]$ da cui: $(w_M)_2 = 2w - (w_M)_1 = \left(\frac{2J_M}{J_M + J_e} - 1\right)(w_M)_1 = \frac{J_M - J_e}{J_M + J_e}(w_M)_1$

La velocità finale del volano (M), quindi, è certamente minore della velocità iniziale, ma può anche cambiare di segno se $J_e > J_M$.
- per il secondo volano (equivalente): $J_e[w - (w_e)_1] = J_e[(w_e)_2 - w]$ da cui: $(w_e)_2 = 2w$, mentre per il volano (U) sarà:

$$(w_U)_2 = 2w\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{2J_M}{J_M + J_e}(w_M)_1 = \frac{2z_1z_2J_M}{z_2^2J_M + z_1^2J_U}(w_M)_1$$