LE CAMMES

Una **camm**e è un elemento meccanico utilizzato per mettere in movimento un secondo elemento, denominato **punteria**, imponendogli, attraverso il contatto diretto un determinato moto. I meccanismi a camme e punteria sono meccanismi semplici e poco costosi, con poche parti in movimento e che occupano uno spazio limitato. Sono questi i motivi per cui trovano largo impiego nell'ambito delle macchine.
Il problema che occorre affrontare è quello di determinare il profilo da assegnare ad una camma affinché la punteria abbia il comportamento cinematico desiderato.

§ 1. – Classificazione dei meccanismi a cammes.

Esiste un'ampia varietà di forme sotto le quali si possono presentare i meccanismi a cammes. Dal punto di vista della forma della camme stessa si possono avere:
cammes piane, o a disco, o radiali (fig.1 a);
cammes a cuneo (fig.1 b);
cammes cilindriche;
cammes frontali.
Il tipo meno comune fra questi è la camme a cuneo la quale richiede un moto di tipo alterno; il tipo più comune, invece è la camme piana e quindi si farà riferimento essenzialmente a questo tipo.
Dal punto di vista dei tipi di punteria, si possono trovare:
punterie con contatto punti-

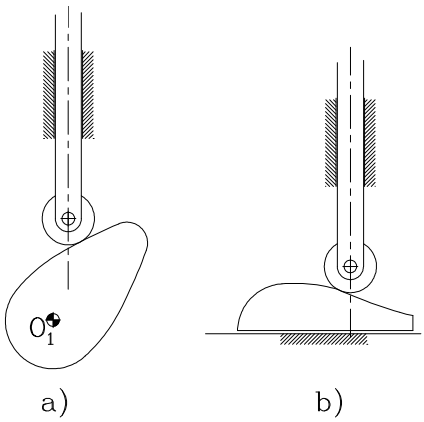

Figura 1

forme (fig. 2a);
punterie con piattello (fig. 2b);
punterie con rullino (fig. 2c);
punterie con superficie curva (fig. 2d).
Si può notare, da quest'elencazione, che la superficie della punteria che viene in contatto con la camme ha sempre una forma geometricamente semplice geometricamente semplice, e che il modo

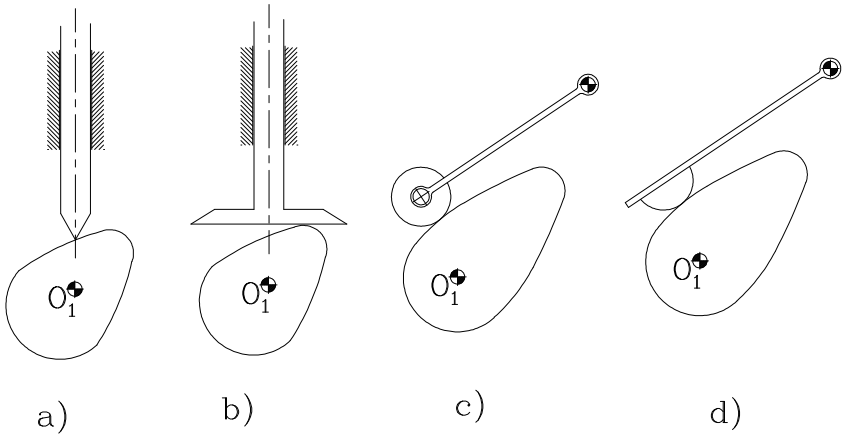

Figura 2

in cui avviene il suo moto discende, di conseguenza, esclusivamente dalla forma della camma. Si badi però che, in tali condizioni, il meccanismo risulta non invertibile: se si volesse ottenere un meccanismo con punteria movente e camma cedente, occorrerebbe ricorrere a forme più complicate.
Figura 3

Sempre con riferimento al moto, si può pure distinguere fra punteria **con moto alterno** traslatorio (fig.2 a,b) e punteria **con moto oscillatorio** (a bilanciere) (fig. 2 c,d). Nel caso di punteria con moto alterno traslatorio, si può ancora distinguere fra **punteria centrata** se il suo asse passa per il centro della coppia rotoidale della camme, e **punteria eccentrica** nel caso opposto.

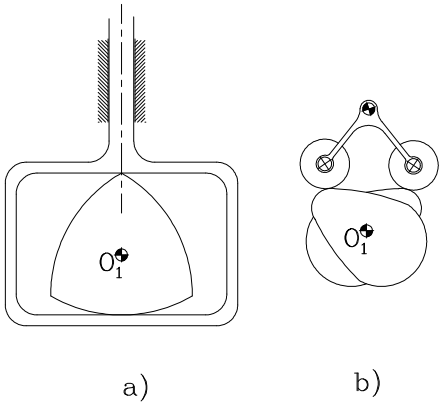

Figura 3

Un'altra questione riguarda il fatto che l'accoppiamento di camma e punteria è certamente un accoppiamento di forza per cui deve sempre essere presente una forza di chiusura della coppia stessa: questa deve essere almeno la forza di gravità (il meccanismo deve essere disposto verticalmente) ma, in generale, è sempre presente una conveniente molla che assicuri l'esistenza del vincolo.

In alcuni casi, con una complicazione costruttiva, la chiusura della coppia può ottenersi facendo lavorare la camma stessa in un apposito alloggiamento (fig.3°): in questo caso il contatto della camma con la punteria si ha in due punti diversi, uno per la fase di alzata, uno per la fase di ritorno. La soluzione analoga per una punteria a bilanciere si ottiene con una coppia di cammes solidali e un doppio bilanciere (fig. 3b).

§ 2. - Nomenclatura nelle cammes

Nella trattazione delle cammes i riferimenti caratteristici cui si ricorre sono i seguenti (fig.4).

Figura 4

Punto tracciatore: è un punto teorico della punteria che, nel moto relativo della punteria rispetto alla camme, genera il profilo primitivo di quet'ultima. Corrisponde al punto di contatto di una punteria con contatto puntiforme; nel caso di punteria con rullino corrisponde al centro del rullino.

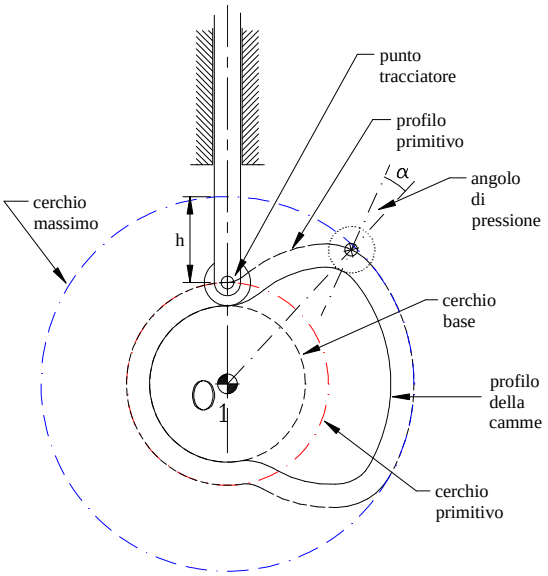

Figura 4

Profilo primitivo è la traiettoria del punto tracciatore nel moto relativo della punteria rispetto alla camma.

Angolo di pressione α è, per ogni punto del profilo primitivo,

l'angolo fra la normale di contatto e la congiungente il punto di contatto con il centro della camme.
Punto di massima pressione è il punto del profilo primitivo in cui si ha il massimo valore di α.
Profilo della camme è il profilo reale su cui avviene il contatto fra camme e cedente. Per una punteria a contatto puntiforme coincide con il profilo primitivo; per una punteria con rullini, differisce dal profilo primitivo del raggio del rullino stesso.
Cerchio primitivo è la più piccola circonferenza, con centro coincidente con il centro di rotazione della camme, tangente al profilo primitivo.
Cerchio massimo è la circonferenza più grande, con centro coincidente con il centro di rotazione della camme, tangente al profilo primitivo.
Cerchio base è la circonferenza è la più piccola circonferenza, con centro coincidente con il centro di rotazione della camme, tangente al profilo effettivo della camme. Per una punteria con rullino è più piccolo del cerchio primitivo, mentre coincide con esso nel caso di una punteria a piattello.
Corsa o alzata è la differenza fra la posizione più alta e la più bassa che può assumere la punteria.
Spostamento della punteria è il valore della coordinata (lineare o angolare) che definisce la posizione della punteria, misurata da un valore di zero prefissato o dalla posizione di riposo, rapportato al tempo o alla rotazione della camme.
Raggio di curvatura (in un punto) è il raggio del cerchio osculatore in un punto del profilo primitivo.
Punto di transizione è il punto di massima velocità, dove l'accelerazione cambia di segno. In una camme che lavora in un alloggiamento chiuso (fig.3a), questo punto viene definito come punto di *crossover* e corrisponde alla configurazione per cui il contatto passa da una faccia all'altra.

§ 3. – Il moto della punteria.

A fronte dell'ampia tipologia possibile di cammes e delle loro differenti forme, pure esse hanno in comune alcune caratteristiche che consentono un approccio sistematico alla loro progettazione.
Un meccanismo a camme è generalmente un sistema ad un solo grado di libertà, in cui il movente, la camme, normalmente ruota

con velocità angolare nota, generalmente costante, ed ha una forma tale da generare sul membro in uscita, la punteria, quel moto che si desidera che esso abbia.
Il problema della progettazione del profilo di una camme si configura quindi tipicamente come un problema di sintesi in cui nota la legge del moto della camme, $\vartheta = \vartheta(t)$, e la legge del moto della punteria che si vuole ottenere, $y = y(\vartheta)$ oppure $\varphi = \varphi(\vartheta)$ a seconda che il suo moto sia traslatorio o rotatorio, si cerca il profilo da assegnare ai due membri per ottenere quanto desiderato; se a

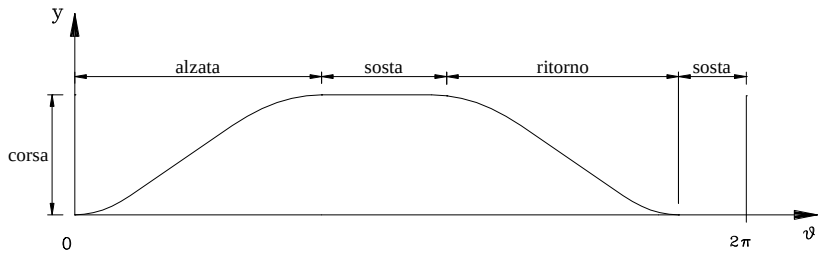

Figura 5

ciò si aggiunge la condizione di prefissare la forma della punteria, nella zona che dovrà trovarsi a contatto della camme, risulta individuato anche il metodo più semplice per la risoluzione del problema: il metodo dell'inviluppo.
La legge del moto della punteria, $y = y(\vartheta)$, prende il nome generico di **diagramma degli spostamenti** che fissa appunto, istante per istante, la posizione che deve assumere la punteria durante una rotazione completa della camme. Su di esso sono generalmente individuabili: una fase angolare di *alzata* in cui la punteria si sposta dalla posizione più bassa a quella più alta, una fase di *ritorno* in cui avviene lo spostamento di verso opposto, fasi queste di solito intervallate da due fasi di *sosta* (o di riposo) in cui la velocità della punteria è nulla. La durata angolare di ciascuna fase non è normalmente la medesima: dipende dalle applicazioni cui è destinato il meccanismo, così come dipende pure da queste la forma delle funzioni che definiscono sia la fase di alzata che di ritorno.
Per la forma da dar a tali fasi, tuttavia, è importante tenere in considerazione diversi aspetti.
il **carico di lavoro**, che rappresenta di fatto il lavoro utile fatto dal meccanismo, e che determina in definitiva il valore di tutte le forze in giuoco;

l'entità delle **forze d'inerzia** e quindi il valore delle accelerazioni, tanto più elevate quanto più è elevata la velocità di rotazione della camme; possono generare flessioni, vibrazioni, e sforzi indesiderati sulla punteria;
la possibilità di **fenomeni d'urto** conseguenti alla separazione fra le superfici di contatto e che possono derivare sia da giochi che anche dal verificarsi di un moto relativo vibratorio fra camme e punteria; un meccanismo che vibra eccessivamente non solo si discosta dalla legge cinematica voluta ma aumenta la sua possibilità di incorrere in danni strutturali;
presenza di **forze d'attrito** che, in generale, possono essere concordi o discordi con le forze d'inerzia; potrebbero quindi mitigare almeno in parte l'effetto delle vibrazioni fungendo da elemento smorzante.
Ottimizzare contemporaneamente tutti questi aspetti è ovviamente impossibile; quindi, alla fine, la forma del diagramma degli spostamenti sarà da un compromesso fra le singole esigenze; in ogni caso un buon diagramma degli spostamenti sarà caratterizzato dall'avere, punto per punto, valori assoluti di accelerazione sufficientemente contenuti.

§ 4. – Metodo grafico per il tracciamento del profilo della camme.

Il tracciamento grafico del profilo di una camma si fonda, essenzialmente, sul principio di inversione: quell’inversione in cui il membro fisso del meccanismo sia la stessa camme, rispetto alla quale, quindi, sarà possibile ricostruire il moto relativo della punteria. In tali condizioni il profilo della camme deriverà dall'inviluppo delle successive posizioni del profilo della punteria.
I procedimenti grafici differiscono leggermente in base al tipo di punteria: sarà utile pertanto analizzarne i tipi più comuni. Nel mostrare tali procedimenti, al fine di poter confrontare i profili ottenuti per i diversi tipi di punteria, si è adoperato sempre il medesimo diagramma degli spostamenti.

a) Camme radiale con punteria centrata traslante e rullino di contatto (fig. 6).

Si procederà prima al tracciamento dl profilo primitivo utilizzan-

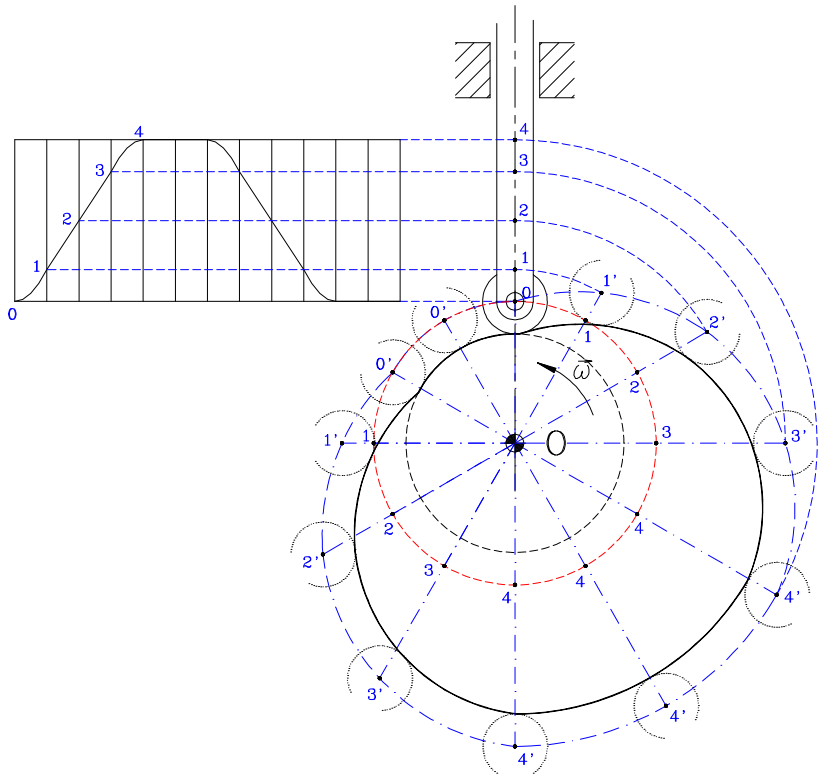

Figura 6

do come punto tracciatore il centro del rullino e successivamente si otterrà il profilo effettivo della camma tracciando l'inviluppo delle successive posizioni del rullino nel moto relativo alla camme.

In questo stesso moto relativo, la retta asse della punteria ruoterà intorno al centro di rotazione della camme in senso inverso a quello con cui ruota la camme stessa.

Procedura:

1. Disegnare la punteria (e il centro di rotazione della camme) in modo che il punto tracciatore si trovi in corrispondenza dello zero del diagramma degli spostamenti;
2. Suddividere il diagramma degli spostamenti in un numero conveniente d'intervalli e riportare le corrispondenti ordinate sulla retta, asse della punteria;
3. Tracciare il cerchio primitivo e su di esso tracciare le radiali corrispondenti, e nell'ordine, a ciascun'ascissa del diagramma degli spostamenti;
4. Intercettare ogni radiale nei punti 1', 2', ecc. con un arco di cerchio di centro O e raggio pari a O-1, O-2, ecc. ossia con un raggio pari al raggio del cerchio primitivo aumentato

del valore dello spostamento corrispondente a quella posizione angolare della punteria;

5. Tracciare una linea passante per i punti 1', 2', ecc. per avere il profilo primitivo della camme;
6. Disegnare con centro nei punti 1', 2', ecc una circonferenza pari a quella del rullino;
7. Tracciare la linea del profilo effettivo della camme in modo che sia tangente a ciascuna di queste circonferenze.

b) Camme radiale con punteria non centrata traslante, con rullino di contatto (fig. 7).

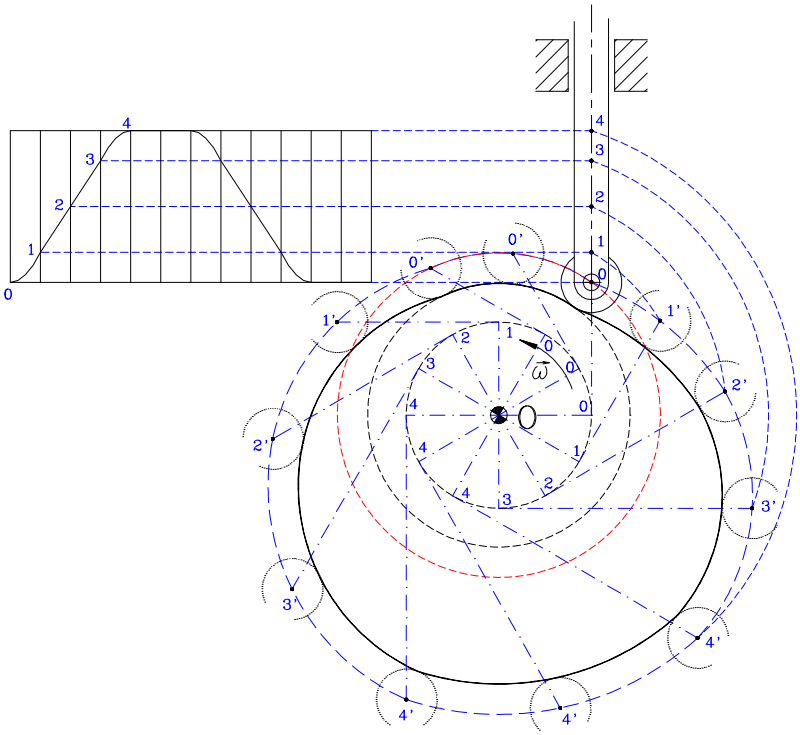

Figura 7

In questo caso, nel moto relativo della punteria rispetto alla camme, l'asse della punteria deve rimanere tangente ad una circonferenza di raggio pari alla eccentricità, ossia alla distanza del punto O dall'asse della coppia prismatica.

Procedura:

1. e 2. Come nel caso precedente;
3. Tracciare il cerchio di centro O e raggio la distanza di questo dall'asse della punteria (*cerchio di offset*), e su di

esso tracciare le radiali corrispondenti, e nell'ordine, a ciascun'ascissa del diagramma degli spostamenti;

4. Dall'estremità di ogni radiale, 1, 2, ecc. tracciare le tangenti al cerchio di offset;
5. Intercettare ogni tangente nei punti 1', 2', ecc. con un arco di cerchio di centro O e raggio pari alla distanza da O dei punti 1, 2, ecc. dell'asse della punteria, ossia con un raggio pari al raggio del cerchio primitivo aumentato del valore dello spostamento corrispondente a quella posizione angolare della punteria;
6. Tracciare una linea passante per i punti 1', 2', ecc. per avere il profilo primitivo della camme;
7. Disegnare con centro nei punti 1', 2', ecc una circonferenza pari a quella del rullino;
8. Tracciare la linea del profilo effettivo della camme in modo che sia tangente a ciascuna di queste circonferenze.

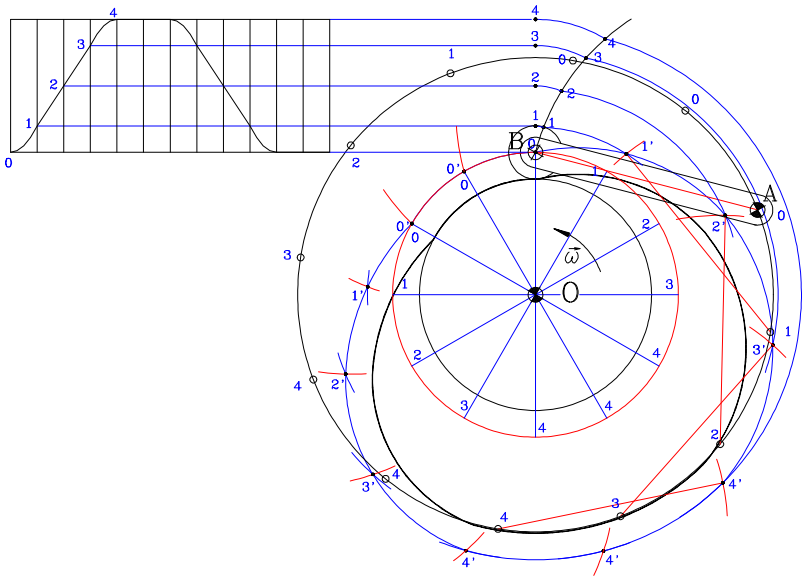

Figura 8

c) Camme con punteria a bilanciere, con rullino di contatto (fig.8).

Nel moto relativo della punteria rispetto alla camme la coppia rotoidale A del bilanciere avrà come traiettoria una circonferenza di centro O e raggio OA, mentre il punto tracciatore, il centro B del rullino, si sposta su un arco di circonferenza con cen-

tro nelle successive posizioni assunte da A e raggio AB.
Il diagramma degli spostamenti in questo caso deve rappresentare con le sue ordinate la rotazione della punteria intorno ad A. Nell'esempio che si descrive, tuttavia si suppone che il diagramma rappresenti la lunghezza degli archi descritti da B nel moto intorno ad A.
Procedura:
1. 2. e 3. Come nel caso a);

4. Tracciare un arco di cerchio di centro A e raggio AB, e riportare su di esso i punti 1, 2, ecc., ordinate del diagramma degli spostamenti;
5. Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA, traiettoria del punto A nel moto relativo della punteria e si riportino su questa le successive posizioni, 1, 2, ecc., del punto A;
6. Per ognuno di questi ultimi tracciare un arco di cerchio di centro 1, 2, ecc. e di raggio AB si trovi l'intersezione 1', 2', ecc. di ciascuno di essi con un arco di cerchio di centro O e raggio pari alla distanza da O dei punti 1, 2, ecc. riportati in 4), ossia con un raggio pari al raggio del cerchio primitivo aumentato del valore dello spostamento corrispondente a quella posizione angolare della punteria;
7. Tracciare una linea passante per i punti 1', 2', ecc. per avere il profilo primitivo della camme;
8. Disegnare con centro nei punti 1', 2', ecc una circonferenza pari a quella del rullino;
9. Tracciare la linea del profilo effettivo della camme in modo che sia tangente a ciascuna di queste circonferenze.

d) Camme con punteria centrata e piattello traslante (fig.9).

In questo caso, nel moto relativo della punteria rispetto alla camme, l'asse della stessa punteria ruota intorno al punto O mentre il piattello dovrà mantenersi sempre tangente alla camme.
Procedura:

1. Disegnare la punteria (e il centro di rotazione della camme) in modo che il profilo del piattello si trovi in corrispondenza dello zero del diagramma degli spostamenti;
2. Suddividere il diagramma degli spostamenti in un numero conveniente di intervalli e riportare le corrispondenti ordinate sull'asse della punteria;
3. Tracciare il cerchio base (che qui coincide con il cerchio

primitivo) e su di esso tracciare le radiali corrispondenti, e nell'ordine, a ciascuna ascissa del diagramma degli spostamenti;

4. Intercettare ogni radiale nei punti 1', 2', ecc. con un arco di cerchio di centro O e raggio pari a O-1, O-2, ecc. ossia con un raggio pari al raggio del cerchio primitivo aumentato del valore dello spostamento corrispondente a quella posizione angolare della punteria;
5. Per ciascun punto 1', 2', ecc. tracciare un segmento per-

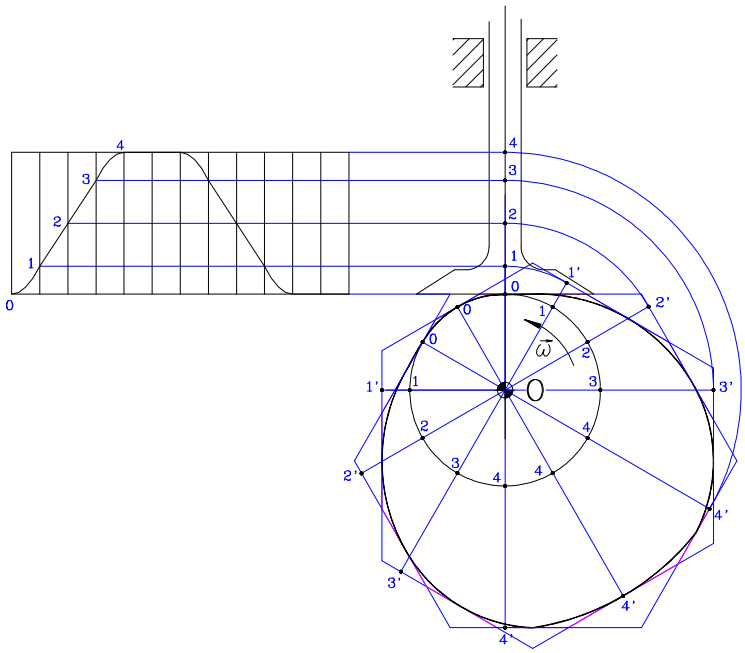

Figura 9

pendicolare alla corrispondente radiale; su questi segmenti, nel moto relativo, si troverà via via il profilo del piattello;

6. Tracciare la linea del profilo effettivo della camme in modo che sia tangente a ciascuno di questi segmenti.

Il punto di tangenza fra camme e piattello, nelle singole posizioni, corrisponde, per ogni tangente alla camme, al punto medio del segmento intercettato dalle due tangenti adiacenti.

e) Camme con punteria a bilanciere, a faccia piana (fig.10).

Questo caso può interpretarsi come una combinazione del caso c) e del caso d). Qui l'elemento che si mantiene invariabile, nel moto

relativo della punteria rispetto alla camme, è la distanza della coppia rotoidale A della punteria dalla retta coincidente con la faccia piana in contatto con la camme.
Procedura:

1. Disegnare la punteria (e il centro di rotazione della camme) in modo che il profilo della faccia piana della punteria si trovi in corrispondenza dello zero del diagramma degli spostamenti;
2. Suddividere il diagramma degli spostamenti in un numero conveniente d'intervalli e riportare le corrispondenti ordinate su un arco di cerchio di centro A e raggio AB, essendo AB un punto arbitrario del piano d'appoggio della punteria;
3. Tracciare il cerchio base (che qui coincide con il cerchio primitivo) e su di esso tracciare le radiali corrispondenti, e nell'ordine, a ciascuna ascissa del diagramma degli spo-

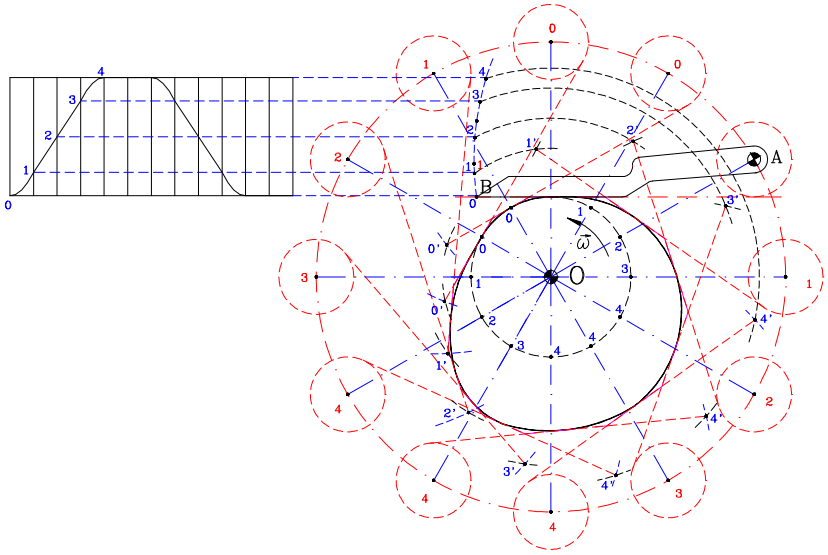

Figura 10

stamenti;

4. Tracciare la circonferenza di centro O e raggio OA, traiettoria del punto A nel moto relativo della punteria e si riportino su questa le successive posizioni, 1, 2, ecc., del punto A nell'intersezione con ciascuna radiale;
5. S'individuino i punti d'intersezione 1', 2', ecc. fra gli archi di cerchio di centro O e raggio pari a O-1, O-2, ecc., ed i corrispondenti arhi di centri 1, 2, ecc. della traiettoria di A

e raggio AB;

6. Con centro in ciascun punto 1, 2, ecc. della traiettoria di A tracciare una circonferenza di raggio pari alla distanza della coppia rotoidale A dal profilo della faccia piana della punteria;
7. Da ciascun punto 1', 2', ecc. tracciare infine un segmento tangente alla rispettiva circonferenza; questi segmenti corrispondono alla posizione, nel moto relativo, del profilo della faccia piana della punteria;
8. Tracciare, come nel caso d), la linea del profilo effettivo della camme in modo che sia tangente a ciascuno di questi segmenti.

Anche qui, il punto di tangenza fra camme e piattello, nelle singole posizioni, corrisponde, per ogni tangente alla camme, al punto medio del segmento intercettato dalle due tangenti adiacenti.

§ 5. –Tracciamento del profilo della camme; metodo analitico.

Il metodo grafico descritto nel paragrafo precedente risulta inadeguato quando il meccanismo a camme è destinato a funzionare a velocità elevata oppure anche se la camme deve essere costruita con procedimenti di taglio incrementali o con macchine a controllo numerico.

In questi casi è importante sviluppare le equazioni del profilo della camme tenendo conto sia del tipo di camme prescelto che della punteria.

Le operazioni di calcolo numerico diventano immediatamente voluminose, ma non per questo non abbordabili dati i mezzi di calcolo di cui oggi si dispone.

Tra i diversi modi con cui è possibile affrontare il problema, viene qua presentato il metodo dell'inviluppo applicandolo ai sei tipi di meccanismi più comuni.

La teoria che riguarda l'inviluppo di una famiglia di curve piane, $S(\gamma_c)$, dipendenti da un solo parametro, afferma che questa ammette una sua curva inviluppo, γ, se si verificano contemporaneamente le seguenti circostanze:

per ciascun punto della curva γ è possibile individuare una curva γ_c della famiglia che sia tangente a γ in quel punto;

per ciascuna curva γ_c della famiglia è possibile individuare un

punto della curva γ tangente a quella curva γ_c in quel punto;
nessuna curva della famiglia ha un segmento in comune con la curva inviluppo.
Pertanto, supponendo che la curva γ_c della famiglia $S(\gamma_c)$ sia data dall'equazione $F(x, y, c) = 0$, e che questa sia continua e derivabile rispetto a tutti e tre gli argomenti nell'intorno del punto $P_0(x_0, y_0, c_0)$, in corrispondenza di P_0 si dovrà avere:

$$F(x_0, y_0, c_0) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)_{P_0} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial c \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial c \partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \neq 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Se sono verificate queste condizioni, quindi, in un certo intorno *u* di $P_0(x_0, y_0)$ e, per quanto riguarda il parametro *c*, per un definito intorno *V* del valore c_0, esiste un inviluppo della famiglia $F(x, y, c) = 0$.

In generale, l'equazione dell'inviluppo si può ottenere dalle equazioni:

$$F(x, y, c) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial c}(x, y, c) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

esprimendo per esempio c in funzione di x ed y, per giungere, per sostituzione, alla funzione

$$F(x, y, c(x, y)) = 0$$

Esempio 1:

Consideriamo la famiglia di rette (fig. 11):

$$F(x,y,c) = y - cx - \frac{4}{c} = 0$$

Si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial c} = -x + \frac{4}{c^2} = 0$$

da cui:

$$c = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Sostituendo nell'equazione della famiglia, si ottiene:

$$y - \frac{2x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = y - \frac{2x + 2x}{\sqrt{x}} = y - \frac{4x}{\sqrt{x}} = 0$$

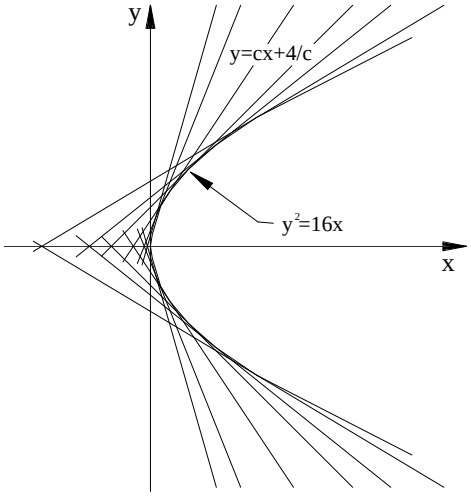

Figura 11

e quindi:

$$y^2 = 16x$$

che è la parabola inviluppo delle posizioni assunte dalla retta data al variare del parametro *c*.

Esempio 2:

Consideriamo la famiglia di curve (fig.12):

$$F(x,y,c) = (y-c)^2 - (x-c)^3 = 0$$

Dalla (5) si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial c}(x,y,c) = -2(y-c) + 3(x-c$$

ossia:

$$y - c = \frac{3}{2}(x-c)^2 = 0$$

Sostituendo nella equazione della famiglia si ottiene:

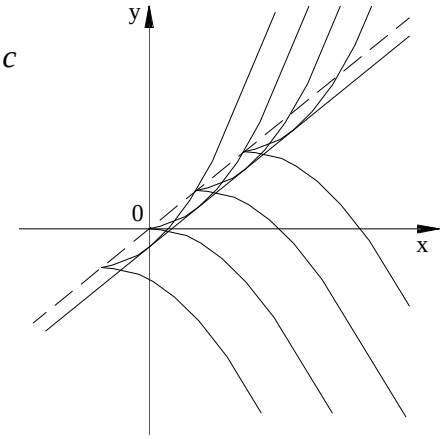

Figura 12

$$\frac{9}{4}(x-c)^4-(x-c)^3=0$$

ossia:

$$(x-c)^3\left[\frac{9}{4}(x-c)-1\right]=0$$

e cioè:

$$\frac{9}{4}(x-c)^3\left(x-c-\frac{4}{9}\right)=0$$

La derivata rispetto a *c*, si annulla quindi:
a) per $x=c$; e si ha in corrispondenza $y=c \Leftrightarrow y=x$

b) per $x=c+\frac{4}{9}$; e, in corrispondenza $(y-c)^2-\left(\frac{4}{9}\right)^3=0$ che vuol dire $y=c+\frac{8}{27} \Leftrightarrow y=x-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=x-\frac{4}{27}$

Per poter analizzare le due soluzioni trovate, calcoliamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3(x-c)^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2(y-c)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial c}=6(x-c) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial c}=-2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=2-6(x-c)$$

da cui si ha:

$$\Delta=6(x-c)^2-12(x-c)(y-c)=6(x-c)[(x-c)-2(y-c)]$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=2[1-3(x-c)]$$

Se in queste due ultime si sostituisce il risultato *x=y=c* trovato come caso a) si ottiene $\Delta=0$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial c^2}=2$ e quindi questa soluzione non corrisponde ad un inviluppo: si tratta solamente di una retta passante per i punti di cuspide della famiglia;

viceversa sostituendo il risultato trovato come caso b) $x - c = \frac{4}{9}$ e $y = c + \frac{8}{27}$, si ottiene:

$$\Delta = 6\frac{4}{9}\left(\frac{4}{9} - 2\frac{8}{27}\right) = -\frac{32}{81} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} == -\frac{2}{3} \neq 0$$

per cui la soluzione b) corrisponde effettivamente ad un inviluppo della famiglia data, la cui equazione sarà allora:

$$y = x - \frac{4}{27}$$

e che è ancora una retta.

Applichiamo ora questo procedimento ad alcuni tipi di meccanismi a cammes.

a) Camme radiale con punteria centrata traslante, con rullino di contatto (fig. 13).

Indichiamo con r_b il raggio dl cerchio di base, con r_r il raggio del rullino, e con h lo spostamento della punteria al variare dell'angolo di rotazione, ϑ, della camme. La distanza radiale del punto tracciatore, il centro del rullino, dal centro di rotazione, O, della camme, vale istante per istante:

$$s = r_b + r_r + h$$

Pertanto l'equazione generale dell'inviluppo è data da:

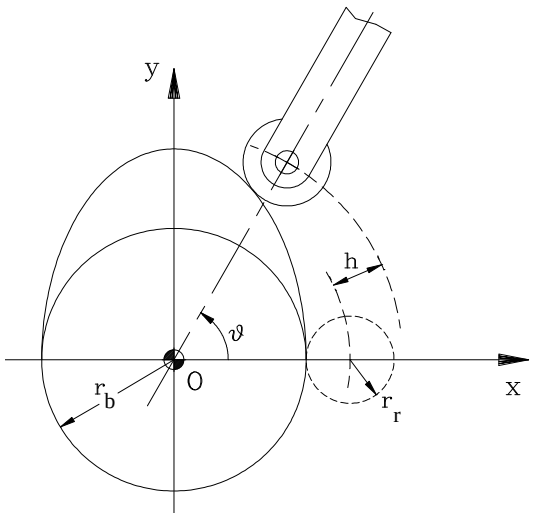

Figura 13

$$F(x, y, \vartheta) = (x - s\cos\vartheta)^2 + (y - s\sin\vartheta)^2 - r_r^2 = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

dove l'angolo ϑ è misurato a partire dalla configurazione in cui inizia il moto della punteria (al termine del cerchio base).

Questa non è altro che la condizione che il punto P(x,y) della curva della camme deve essere anche punto della circonferenza profilo del rullino.
Ponendo nulla la derivata di questa rispetto a ϑ, si ha, tenendo conto che $\frac{ds}{d\vartheta} = \frac{dh}{d\vartheta}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = (x - s\cos\vartheta)\left(s\sin\vartheta - \cos\vartheta\frac{dh}{d\vartheta}\right) + \\ -(y - s\sin\vartheta)\left(s\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{dh}{d\vartheta}\right) = 0\end{aligned} \quad \textbf{(7)}$$

che, ponendo:

$$H = s\sin\vartheta - \cos\vartheta\frac{dh}{d\vartheta}$$
$$K = s\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{dh}{d\vartheta}$$

si può scrivere:

$$(x - s\cos\vartheta)H - (y - s\sin\vartheta)K = 0 \quad \textbf{(8)}$$

Ricavando dalla (8):

$$y - s\sin\vartheta = \frac{H}{K}(x - s\cos\vartheta)$$

e sostituendo nella (6), si ottiene:

$$(x - s\cos\vartheta)^2\left[1 + \left(\frac{H}{K}\right)^2\right] = r_r^2$$

e quindi:

$$x = s\cos\vartheta \pm \frac{r_r K}{\sqrt{H^2 + K^2}} \quad \textbf{(9)}$$

La (9), sostituita nella (8), consente poi di ricavare:

$$y = s\sin\vartheta \pm \frac{r_r H}{\sqrt{H^2 + K^2}} \quad \textbf{(10)}$$

Ripristinando poi le originarie espressioni di *H* e *K*, e tenendo conto che:

$$H^2 + K^2 = s^2 + \left(\frac{dh}{d\vartheta}\right)^2$$

possiamo scrivere le espressioni finali per le coordinate dei punti della camme:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\vartheta \pm \frac{r_r\left(s\cos\vartheta + \sin\vartheta\dfrac{dh}{d\vartheta}\right)}{\sqrt{s^2 + \left(\dfrac{dh}{d\vartheta}\right)^2}} \\ y &= s\sin\vartheta \pm \frac{r_r\left(s\sin\vartheta - \cos\vartheta\dfrac{dh}{d\vartheta}\right)}{\sqrt{s^2 + \left(\dfrac{dh}{d\vartheta}\right)^2}} \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

Ai fini di evitare inutili ripetizioni di calcolo, al posto della forma (10) è più utile utilizzare:

$$y = \frac{Hx + s\dfrac{dh}{d\vartheta}}{K} \qquad \textbf{(10')}$$

che si ottiene ancora dalla (8), tenendo conto che è proprio:

$$K\sin\vartheta - H\cos\vartheta = \frac{dh}{d\vartheta}$$

Pertanto la forma più utile per il calcolo è data da:

$$\begin{aligned} x &= s\cos\vartheta \pm \frac{r_r}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{H}{K}\right)^2}} \\ y &= \frac{Hx + s\dfrac{dh}{d\vartheta}}{K} \end{aligned} \qquad \textbf{(11')}$$

Rimane da chiarire quale dei due segni presenti nella prima delle (11') sia da utilizzarsi.
Si può, allo scopo, considerare che, nella configurazione iniziale in cui è ϑ=0, si hanno pure le condizioni: $h = 0$ e $\dfrac{dh}{d\vartheta} = 0$, con

il punto di contatto che dista dal centro O della quantità r_b.
Imponendo tali condizioni si ha H=0 e K=s, e pertanto deve essere pure $x = s \pm r_r = r_b + r_r \pm r_r = r_b$.
La seconda eguaglianza risulta verificata solo in presenza del segno negativo. Il segno positivo andrà utilizzato dovendo progettare una camme cava in cui il contatto iniziale deve trovarsi ovviamente a distanza da O pari a $r_b + 2r_r$.

b) Camme radiale con punteria non centrata traslante, con rullino di contatto (fig. 14).

Indichiamo con e il raggio del cerchio di offset, dell'asse della punteria dal centro di rotazione O della camme; scegliamo il riferimento che abbia origine nel centro di rotazione della camme e l'asse delle x parallelo all'asse della punteria nella configurazione in cui il contatto fra rullino e camme avvenga sull'ultimo punto del cerchio base.

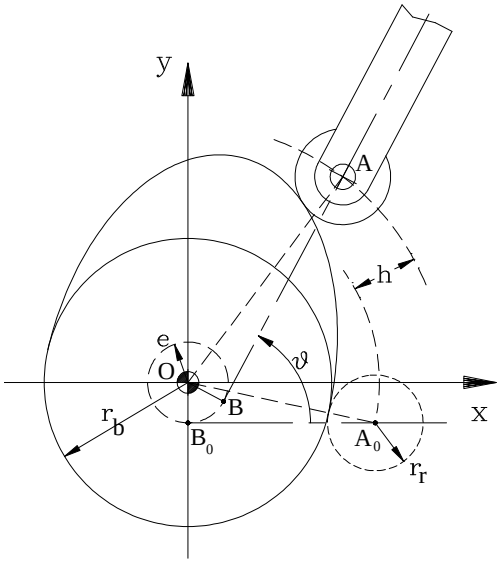

Figura 14

In tali condizioni la distanza d=A_0B_0 del centro del rullino da O è esprimibile come:

$$d = \sqrt{(r_b + r_r)^2 - e^2}$$

mentre le coordinate del centro A del rullino sono:

$$x_A = (d + h)\cos\vartheta + e\sin\vartheta$$
$$y_A = (d + h)\sin\vartheta - e\cos\vartheta$$

Pertanto l'equazione della circonferenza del rullino nella sua generica posizione è data da:

$$F(x,y,\vartheta)=[x-(d+h)\cos\vartheta-e\sin\vartheta]^2+ \\ +[y-(d+h)\sin\vartheta+e\cos\vartheta]^2-r_r^2=0 \qquad \textbf{(12)}$$

Segue allora:

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta}=[x-(d+h)\cos\vartheta-e\sin\vartheta]\left[(d+h)\sin\vartheta-\left(e+\frac{dh}{d\vartheta}\right)\cos\vartheta\right]+ \\ -[y-(d+h)\sin\vartheta+e\cos\vartheta]\left[(d+h)\cos\vartheta+\left(e+\frac{dh}{d\vartheta}\right)\sin\vartheta\right]=0$$

la quale ponendo:

$$U=\left[(d+h)\sin\vartheta-\left(e+\frac{dh}{d\vartheta}\right)\cos\vartheta\right] \\ V=\left[(d+h)\cos\vartheta+\left(e+\frac{dh}{d\vartheta}\right)\sin\vartheta\right] \qquad \textbf{(13)}$$

si può scrivere come:

$$[y-(d+h)\sin\vartheta+e\cos\vartheta]=\frac{U}{V}[x-(d+h)\cos\vartheta-e\sin\vartheta] \qquad \textbf{(14)}$$

Sostituendo quest'ultima nella (12) si ha, allora:

$$[x-(d+h)\cos\vartheta-e\sin\vartheta]^2\left[1+\left(\frac{U}{V}\right)^2\right]=r_r^2$$

e quindi:

$$x=(d+h)\cos\vartheta+e\sin\vartheta\pm\frac{r_rV}{\sqrt{U^2+V^2}} \qquad \textbf{(15)}$$

Sostituendo, poi, questa nella (14), si ha:

$$y=(d+h)\sin\vartheta-e\cos\vartheta\pm\frac{r_rU}{\sqrt{U^2+V^2}} \qquad \textbf{(16)}$$

Se poi si tiene conto che, nella (14) è:

$$V[(d+h)\sin\vartheta-e\cos\vartheta]-U[(d+h)\cos\vartheta+e\sin\vartheta]=(d+h)\frac{dh}{d\vartheta}$$

al posto della (16) si può, più comodamente, utilizzare la forma:

$$y = \frac{Ux + (d+h)\dfrac{dh}{d\vartheta}}{V} \qquad \textbf{(16')}$$

Per quanto riguarda la scelta del segno nella (15) vale quanto visto nel caso precedente.

c) Camme con punteria a bilanciere, con rullino di contatto (fig.15).

Scegliamo il riferimento con origine nel centro di rotazione O della camme e l'asse delle x passante per il centro A_0 della coppia rotoidale del bilanciere di lunghezza $A_0B_0=l$; come configurazione iniziale quella in cui il contatto fra rullino e camme avvenga sull'ultimo punto del cerchio base, cui corrisponde l'angolo φ_0 del bilanciere rispetto all'asse delle x.

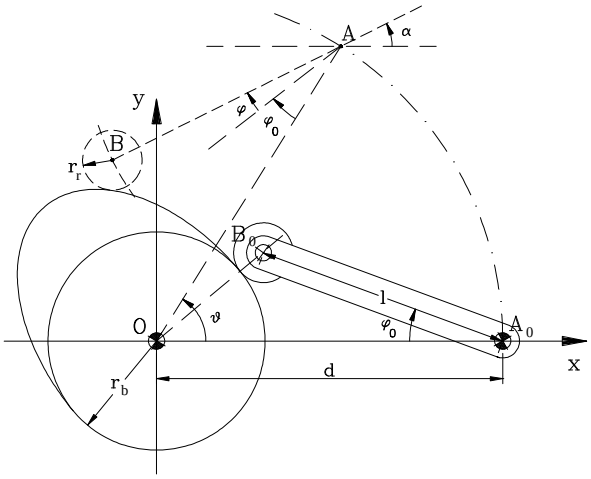

Figura 15

La legge dello spostamento della punteria sia data da $\varphi=\varphi(\vartheta)$.

Intanto, dal triangolo OA_0B_0, si può ricavare il valore di φ_0, dovendo essere:

$$\cos\varphi_0 = \frac{d^2 + l^2 - (r_b + r_r)^2}{2dl}$$

Introduciamo poi l'angolo α l'angolo formato dal bilanciere, nella posizione generica, con l'asse delle x e che vale:

$$\alpha = \vartheta - (\varphi + \varphi_0)$$

Le coordinate del centro B del rullino sono allora:

$$x_B = d\cos\vartheta - l\cos\alpha$$
$$y_B = d\sin\vartheta - l\sin\alpha$$

per cui l'equazione implicita della famiglia di curve costituita dalle successive posizioni del rullino è data da:

$$F(x,y,\vartheta) = (x - d\cos\vartheta + l\cos\alpha)^2 + \\ + (y - d\sin\vartheta + l\sin\alpha)^2 - r_r^2 = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

dove è $\alpha=\alpha(\vartheta)$ ma anche $\frac{d\alpha}{d\vartheta} = 1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}$.

Ne segue allora:

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = (x - d\cos\vartheta + l\cos\alpha)\left[d\sin\vartheta - l\sin\alpha\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)\right] + \\ - (y - d\sin\vartheta + l\sin\alpha)\left[d\cos\vartheta - l\cos\alpha\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)\right] = 0$$

la quale ponendo:

$$P = d\sin\vartheta - l\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)\sin\alpha$$
$$Q = d\cos\vartheta - l\left(1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)\cos\alpha \qquad \textbf{(18)}$$

si può scrivere come:

$$y - d\sin\vartheta + l\sin\alpha = \frac{P}{Q}(x - d\cos\vartheta + l\cos\alpha) \qquad \textbf{(19)}$$

Sostituendo quest'ultima nella (17) si ha, allora:

$$(x - d\cos\vartheta + l\cos\alpha)^2\left[1 + \left(\frac{P}{Q}\right)^2\right] = r_r^2$$

e quindi:

$$x = d\cos\vartheta - l\cos\alpha \pm \frac{r_r Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \qquad \textbf{(20)}$$

Sostituendo, poi, questa nella (19), si ha:

$$y = d\sin\vartheta - l\sin\alpha \pm \frac{r_r P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \qquad \textbf{(21)}$$

Se poi si tiene conto che, nella (19) è:

$$Q\left[d\sin\vartheta - l\sin\alpha\right] - P\left[d\cos\vartheta - l\cos\alpha\right] = dl\sin\left(\vartheta - \alpha\right)\frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

e che $\vartheta - \alpha = \left(\varphi + \varphi_0\right)$, al posto della (21) si può, più comodamente, utilizzare la forma:

$$y = \frac{Px + dl\sin\left(\varphi + \varphi_0\right)\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}}{Q} \qquad \textbf{(21')}$$

Per quanto riguarda la scelta del segno nella (20) vale quanto visto nel caso precedente.

d) Camme con punteria centrata, a piattello traslante (fig.16).

Scegliamo un riferimento che abbia origine nel centro di rotazione O della camme e l'asse delle x coincidente con l'asse della punteria quando questa si trova nella configurazione iniziale, cioè quella in cui il piattello è in contatto con la camme sull'ultimo punto del cerchio base.

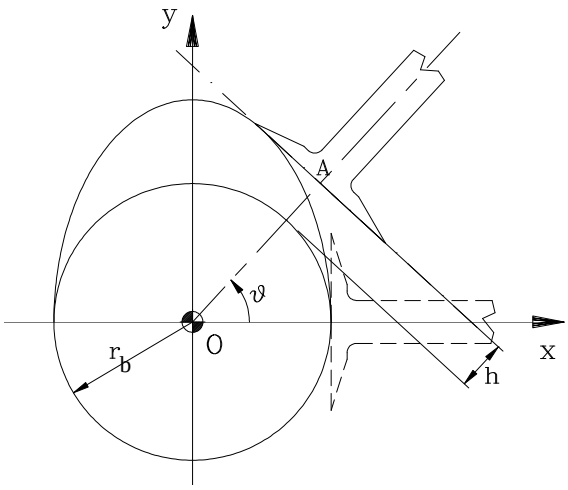

Figura 16

Una configurazione generica nel moto della punteria rispetto alla camme, sarà quindi, caratterizzata dall'asse della punteria ruotato di un angolo ϑ rispetto all'asse delle x, e intersecato dalla retta che definisce il profilo del piattello in un punto di coordinate:

$$x_A = (r_b + h)\cos\vartheta$$
$$y_A = (r_b + h)\sin\vartheta \qquad \textbf{(22)}$$

L'equazione di questa retta sarà allora del tipo:

$$y = mx + c$$

con il coefficiente angolare $m = -\cot\vartheta$ e l'intersezione con l'asse delle y: $c = \dfrac{r_b + h}{\sin\vartheta}$.

Sarà cioè:

$$y = \frac{r_b + h - x\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

da cui l'equazione implicita della famiglia:

$$F(x, y, \vartheta) = y\sin\vartheta + x\cos\vartheta - (r_b + h) = 0 \qquad \textbf{(23)}$$

Ne segue:

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = y\cos\vartheta - x\sin\vartheta - \frac{dh}{d\vartheta} = 0 \qquad \textbf{(24)}$$

Risolvendo il sistema delle (23) e (24) si ricava:

$$x = (r_b + h)\cos\vartheta - \frac{dh}{d\vartheta}\sin\vartheta$$
$$y = (r_b + h)\sin\vartheta + \frac{dh}{d\vartheta}\cos\vartheta \qquad \textbf{(25)}$$

che sono le equazioni del profilo della camme.

e) Camme con punteria non centrata, a piattello traslante (fig.17).

La soluzione di questo caso non differisce dal caso precedente.
Infatti, la posizione della retta profilo del

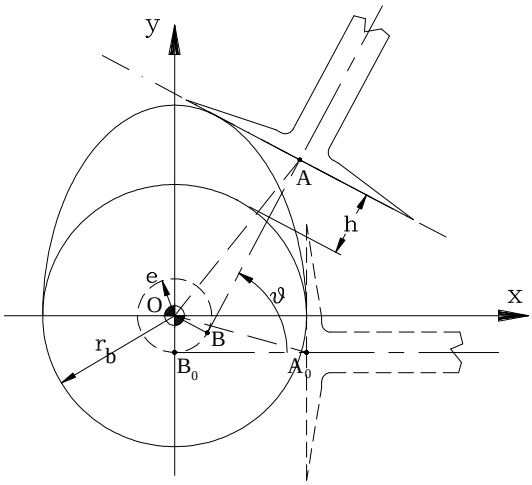

Figura 17

piattello, rispetto alla camme, è indipendente dalla distanza dell'asse della punteria dal centro O della camme; da questa distanza dipendono solo le coordinate del punto A che vanno scritte, in analogia al caso b), come:

$$x_A = (r_b + h)\cos\vartheta + e\sin\vartheta$$
$$y_A = (r_b + h)\sin\vartheta - e\cos\vartheta$$

L'equazione della famiglia di rette risulta identica alla (23).

f) Camme con punteria a bilanciere, a faccia piana centrata (fig.18).

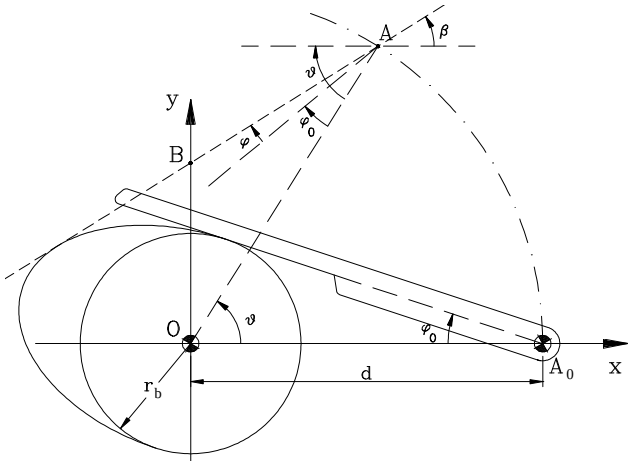

Figura 18

Con faccia piana centrata s'intende che la retta profilo del contatto con la camme passi per il centro della coppia rotoidale del bilanciere.

Il riferimento scelto è quello con origine nel centro di rotazione della camme ed asse x passante per la coppia rotoidale del bilanciere. La rotazione del bilanciere corrisponderà ad una $\varphi = \varphi(\vartheta)$ e la rotazione ϑ della camme è misurata a partire dalla configurazione in cui il punto di contatto con il profilo attivo del bilanciere è l'ultimo del cerchio di base. In questa configurazione il profilo attivo forma un angolo φ_0 con l'asse delle x, valore che si ricava da:

$$\sin\varphi_0 = \frac{r_b}{d}$$

essendo *d* la distanza fra le coppie rotoidali.

Per un valore diverso dell'angolo ϑ il centro della coppia rotoidale del bilanciere, nel moto relativo, si troverà in A ed il bilanciere stesso si troverà ruotato di un ulteriore angolo φ rispetto alla congiungente AO; pertanto, rispetto all'asse delle x, la retta profilo della sua faccia piana formerà l'angolo:

$$\beta = \vartheta - (\varphi + \varphi_0)$$

Le coordinate del punto A, allora, sono date da:

$$x_A = d\cos\vartheta$$
$$y_A = d\sin\vartheta$$

e l'intersezione della retta profilo con l'asse delle y si avrà in un punto B di coordinate:

$$x_B = 0$$
$$y_B = d\sin\vartheta - d\cos\vartheta\tan\beta$$

L'equazione della famiglia di rette sarà allora data da:

$$F(x, y, \vartheta) = \frac{x}{d\cos\vartheta} - \frac{y - d(\sin\vartheta - \cos\vartheta\tan\beta)}{d\cos\vartheta\tan\beta} = 0$$

ossia:

$$F(x, y, \vartheta) = y - \tan\beta(x - d\cos\vartheta) - d\sin\vartheta = 0 \qquad \textbf{(26)}$$

Si ha quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial\vartheta} = -\frac{(x - d\cos\vartheta)}{\cos^2\beta}\frac{d\beta}{d\vartheta} - d\sin\vartheta\tan\beta - d\cos\vartheta = 0 \qquad \textbf{(27)}$$

Da qui si ricava immediatamente:

$$x = d\left[\cos\vartheta - \frac{\cos\beta\cos(\vartheta - \beta)}{\frac{d\beta}{d\vartheta}}\right] \qquad \textbf{(28)}$$

che sostituita nella (26) consente di avere:

$$y = d\left[\sin\vartheta - \frac{\sin\beta\cos(\vartheta - \beta)}{\frac{d\beta}{d\vartheta}}\right] \qquad \textbf{(29)}$$

Sostituendo nelle (28) e (29) l'espressione di β, e tenendo conto che $\frac{d\beta}{d\vartheta} = 1 - \frac{d\varphi}{d\vartheta}$, le stesse si possono scrivere:

$$x = d\left[\cos\vartheta + \frac{\cos(\vartheta-\varphi-\varphi_0)\cos(\varphi+\varphi_0)}{\frac{d\varphi}{d\vartheta}-1}\right]$$
$$y = d\left[\sin\vartheta + \frac{\sin(\vartheta-\varphi-\varphi_0)\cos(\varphi+\varphi_0)}{\frac{d\varphi}{d\vartheta}-1}\right] \qquad \textbf{(30)}$$

che sono le equazioni del profilo della camme in funzione della geometria del meccanismo.

g) Camme con punteria a bilanciere, a faccia piana non centrata (fig.19).

Questo caso differisce dal precedente solo per il fatto che la retta profilo del piano di appoggio della punteria sulla camme non pas-

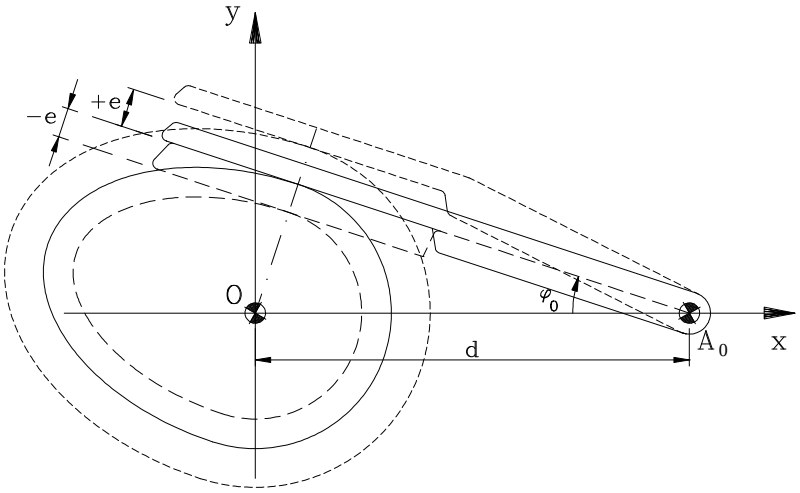

Figura 19

sa più per il centro della coppia rotoidale della punteria, ma risulta traslata nella direzione della normale di una quantità *e* (+*e* se verso l'esterno, -*e* se verso l'interno).
Ripetendo il medesimo procedimento risulta che le equazioni del profilo della camme (30) vanno corrette, tenendo conto del segno di *e*, nelle:

$$x = d\left[\cos\vartheta + \frac{\cos(\vartheta-\varphi-\varphi_0)\cos(\varphi+\varphi_0)}{\frac{d\varphi}{d\vartheta}-1}\right] + e\sin(\vartheta-\varphi-\varphi_0)$$

$$y = d\left[\sin\vartheta + \frac{\sin(\vartheta-\varphi-\varphi_0)\cos(\varphi+\varphi_0)}{\frac{d\varphi}{d\vartheta}-1}\right] + e\cos(\vartheta-\varphi-\varphi_0) \qquad \textbf{(31)}$$

Il profilo della camme, come mostra la fig.19, si ingrandirà (*e>0*) o si rimpicciolirà (*e<0*) rimanendo parallelo a sé stesso.

§ 6. – Il fenomeno del sottotaglio.

Con il termine di "sottotaglio" s'indica quel fenomeno per cui il rullino della punteria nel percorrere il profilo della camme (nel moto relativo) non riesce a percorrere esattamente con continuità la traiettoria desiderata "saltando", in alcuni istanti, un tratto del profilo stesso. Questo fenomeno dipende, come si vedrà, dall'incompatibilità esistente in alcuni punti fra il raggio di curvatura della camme, (così com'è stato ottenuto dalla legge del moto desiderata per la punteria, ed il raggio di curvatura del rullino; lo stesso tipo di fenomeno, ovviamente, si avrebbe in fase di costruzione della camme riguardando anche il rapporto fra il raggio della fresa che deve crearne l'esatto profilo e il raggio di curvatura che, punto per punto, si vuole ottenere. La situazione regolare dovrebbe essere, istante per istante, quella di fig.20, dove il centro del rullino di raggio r_r percorre con continuità il profilo primitivo della camme che, in tutti i suoi punti presenta un raggio di curvatura $\rho > r_r$; questa condizione è sufficiente se è $\rho > 0$, ovvero se i raggi di curvatura dei due membri a contatto stanno da parte opposta.

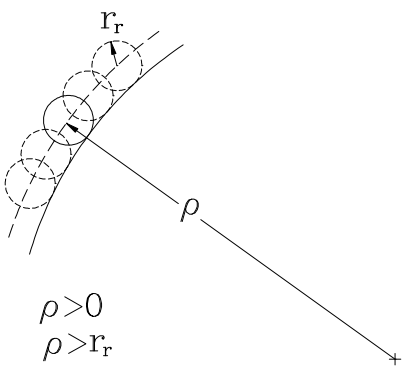

Figura 20

Potrebbe invece accadere che, per dato raggio r_r del rullino, il profilo primitivo della camme risulti tale da avere, in un suo punto $\rho = r_r$. E' la situazione descritta dalla fig.21. Nemmeno in un caso come questo si ha il fenomeno del sottotaglio; tuttavia è ugualmente una condizione da evitare, giacché, come mostra la figura, il profilo effettivo della camme si presenta con uno spigolo aguzzo; in corrispondenza di questo ci sarà inevitabilmente un concentramento di tensioni (teoricamente di valore infinito) tale da portare la zona in quell'intorno ad una rapida usura.

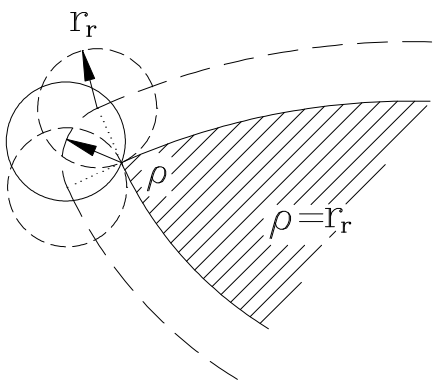

Figura 21

Il fenomeno del sottotaglio si verifica (fig. 22) quando, sempre con $\rho > 0$, la traiettoria desiderata per il centro del rullino (il profilo primitivo della camme) presenta un tratto in cui è $\rho < r_r$. Riferendosi alla fig.22, s'immagini che la traiettoria desiderata per il centro del rullino sia quella individuata dai punti ABCD e che sia il tratto BC il tratto in cui è $\rho < r_r$; quando il centro del rullino ha raggiunto il punto B il rullino stesso ha già perso, a partire dal punto B_2, il contatto con la camme; tale contatto si ripristinerà solamente quando il centro del rullino, superato il

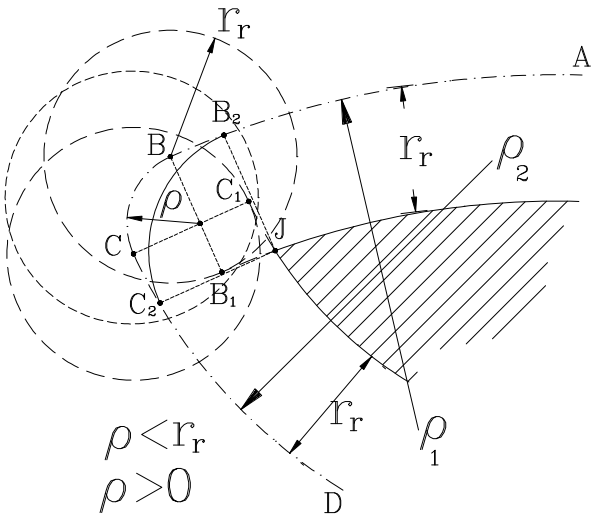

Figura 22

punto C, si porterà nel punto C_2. Il tratto di traiettoria B_2C_2 è quindi saltato e si è verificato perciò il fenomeno del sottotaglio. In effetti, poiché il contatto fra rullino e camme è in ogni caso assicurato da una forza di chiusura, il percorso vero del centro del rullino sarà quello che lo porta da B2 a C2 percorrendo un arco con centro nello spigolo J del profilo effettivo della camme e raggio r_r: l'entità del sottotaglio resta ugualmente invariata.
Si tenga presente inoltre che il problema del sottotaglio non riguarda soltanto il risultato cinematico, ma si ripropone allo stesso modo in fase costruttiva coinvolgendo in modo analogo il raggio della fresa che deve costruire il profilo effettivo della camme.
Quando (fig. 23) il raggio di curvatura della camme è negativo, se il raggio di curvatura del rullino è, in un dato tratto, maggiore del raggio di curvatura della camme, il fenomeno del sottotaglio si verifica egualmente. Dalla figura si comprende perfettamente che è impossibile il verificarsi del contatto fra camme e rullino tra i punti A e B: il tratto compreso fra questi due punti sarà "saltato".

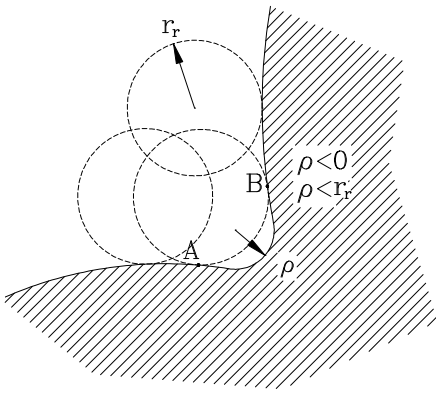

Figura 23

Gli accorgimenti da prendere per evitare il fenomeno del sottotaglio, consistono per un verso nella scelta opportuna del raggio del rullino, finché possibile, e d'altra parte nella scelta di una legge dell'alzata che tenga conto del raggio di curvatura che il profilo effettivo della camme presenterà punto per punto.
L'espressione analitica del raggio di curvatura per una linea piana data del tipo $y = f(x)$ è infatti data da:

$$\rho = \frac{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{3/2}}{f''(x)} \qquad \textbf{(32)}$$

oppure, se la curva è data nella forma polare $r = r(\vartheta)$, dalla forma:

$$\rho = \frac{\left\{[f(\vartheta)]^2 + [f'(\vartheta)]^2\right\}^{3/2}}{[f(\vartheta)]^2 + 2[f'(\vartheta)]^2 - f(\vartheta)f''(\vartheta)} \qquad \textbf{(33)}$$

e da entrambe le forme si può dedurre che il valore di ρ (32) è inversamente proporzionale al valore dell'accelerazione, per cui l'accelerazione della punteria sarà tanto più elevata quanto più piccolo è il raggio di curvatura di quel tratto di profilo della camme. Inoltre (33), poiché l'accelerazione compare a denominatore in un termine negativo, in quei tratti in cui si abbia un'accelerazione negativa e una pendenza non troppo piccola del diagramma dell'alzata si avrà un raggio di curvatura molto piccolo.

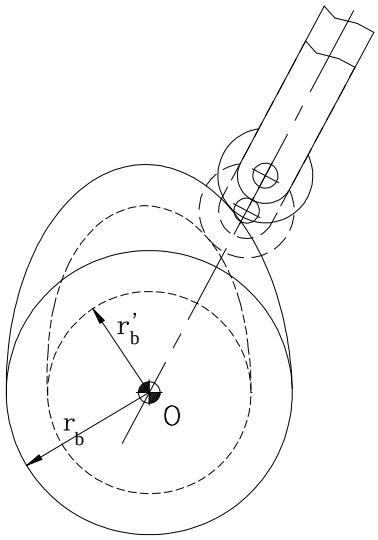

Figura 24

Ancora, occorre tener presente che una diminuzione del cerchio base (fig.24) provoca, a parità di diagramma dell'alzata, una diminuzione del raggio di curvatura del profilo della camme. Come si è visto prima, al fine di evitare il fenomeno del sottotaglio, occorre che il raggio di curvatura della camme sia in ogni punto maggiore del raggio del rullino; volendo limitare l'ingombro massimo della camme converrà, quindi, che il raggio del rullino sia il più piccolo possibile. Usualmente, anche per limitare le condizioni d'usura, si fa sì che il raggio di curvatura della camme sia sempre maggiore di 3 volte il raggio del rullino.

Anche gli altri parametri geometrici, come l'eventuale eccentricità dell'asse della punteria, o la posizione della cerniera fissa e la lunghezza del braccio nelle punterie a bilanciere, hanno influenza sul valore locale del raggio di curvatura della camme; tuttavia il loro effetto non dà generalmente luogo a condizioni di criticità.

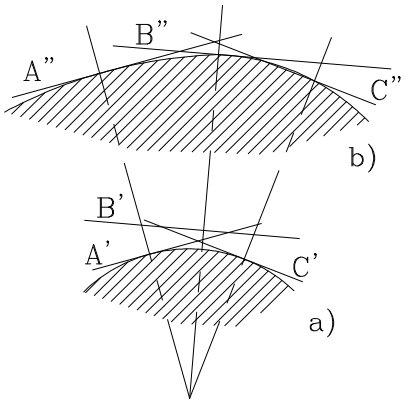

Figura 25

Il fenomeno del sottotaglio può verificarsi anche nel caso di punteria a faccia piana (fig.25), legato anche in questo caso al valore del raggio del cerchio

base. Indicando con A, B, C tre posizioni successive del profilo del piattello si vede in a) che, se il raggio del cerchio base è troppo piccolo è impossibile che il profilo della camme risulti tangente contemporaneamente a tutte e tre le rette A', B', C'; mentre aumentando il raggio del cerchio base, b), la tangenza è realizzabile. Nella condizione a) quindi si avrebbe il sottotaglio.

§ 7. – Determinazione del raggio di curvatura di una camme.

Da quanto precede dovrebbe essere evidente l'importanza che riveste la valutazione corretta del raggio di curvatura del profilo di una camme in relazione sia ai problemi funzionali o costruttivi che possono nascere sia alle dimensioni finali della camme nel suo complesso.
E' quindi interessante vedere come pervenire alla sua determinazione nei vari casi già visti.

a) Camme radiale con punteria non centrata traslante, con rullino di contatto.

Riprendiamo l'esempio di fig.14, supponendo che la camme, avente un cerchio base di raggio r_b, ruoti con velocità angolare ω costante in verso orario intorno alla coppia rotoidale fissa O; la punteria trasla lungo la direzione *a-a* del suo asse, il quale presenta una eccentricità *e* rispetto ad O; il contatto fra punteria e camme avviene attraverso un rullino di raggio r_r, fulcrato in A: sia P il suo punto di contatto con la camme, ed *n-n* la normale di contatto in P. Indicando con ϑ l'angolo che definisce la posizione relativa fra punteria e camme, la legge dell'alzata della punteria sarà $h = \mathrm{h}(\vartheta)$ lun-

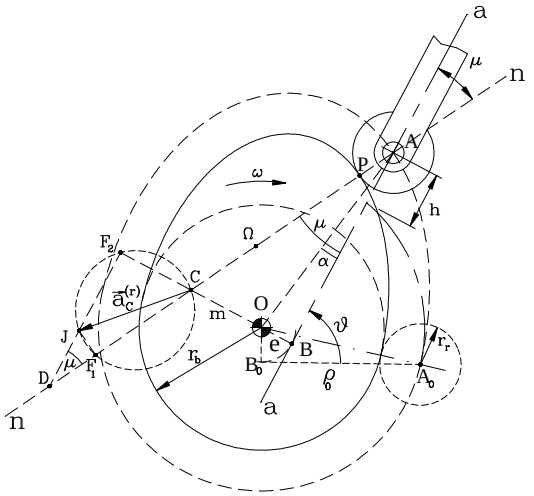

Figura 26

go la retta *a- a*, $h' = \frac{dh}{d\vartheta}$ la sua velocità ed $h'' = \frac{d^2h}{d\vartheta^2}$ la sua accelerazione.
Si vuole determinare il raggio di curvatura ρ_c=P-Ω che occorre dare al profilo effettivo della camme affinché realizzi la prefissata legge dell'alzata della punteria.

Cominciamo con l'osservare che è più conveniente, invece che al profilo effettivo, fare riferimento al profilo primitivo: il centro di curvatura di quest'ultimo, infatti, sarà il medesimo punto Ω del profilo effettivo; sarà il suo raggio di curvatura ρ ad essere punto per punto maggiore di una quantità pari al raggio r_r del rullino. Sarà cioè punto per punto $\rho=\rho_c+r_r$.
In questa logica allora il problema si sposta al caso di camme e punteria con contatto puntiforme, della quale è A il punto tracciatore.

Con riferimento alla fig.26 la posizione del punto tracciatore all'inizio della fase di alzata è individuata dalla distanza:

$$\rho_0 = (A_0 - B_0) = \sqrt{(r_b + r_r)^2 - e^2} \qquad \textbf{(34)}$$

Il centro C del moto relativo fra camme e punteria, in una generica configurazione, evidenzia il triangolo ABC rettangolo in B, e consente di scrivere l'espressione della velocità del punto A della punteria come:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \vec{v}_A^{(r)} + \vec{v}_A^{(t)} = -\vec{\omega} \wedge (A - C) + \vec{\omega} \wedge (A - O) = \vec{\omega} \wedge (C - O)$$

E allora, essendo:

$$\vec{v}_A^{(a)} = \frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \omega\frac{dh}{d\vartheta}$$

sarà pure:

$$(C - O) = \frac{dh}{d\vartheta} = h' \qquad \textbf{(35)}$$

mentre è:

$$(B - A) = \rho_0 + h$$

Ciò consente di esprimere l'angolo di pressione μ come:

$$\tan\mu = \frac{BC}{BA} = \frac{e + h'}{\rho_0 + h} \qquad \textbf{(36)}$$

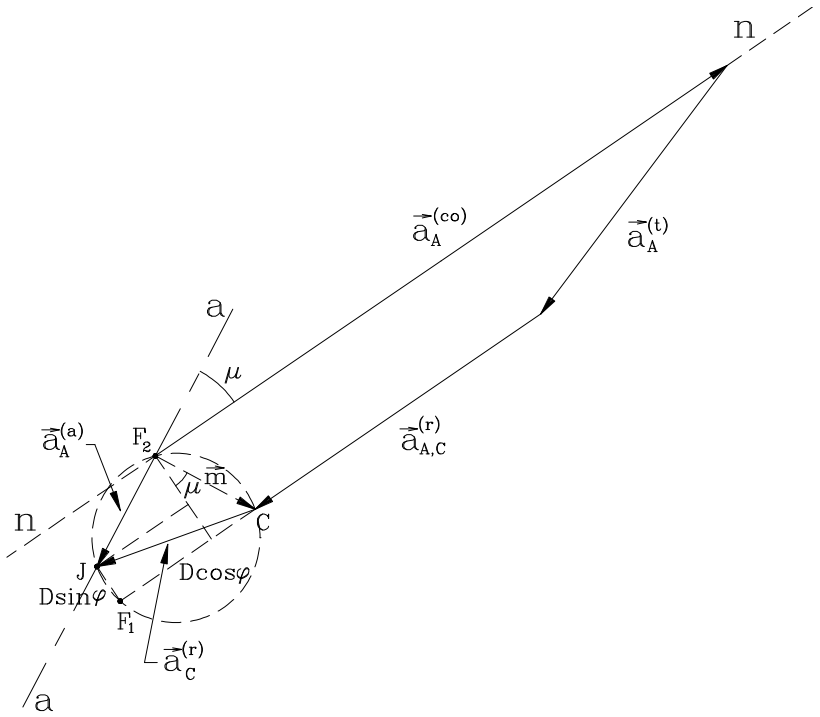

Figura 27

D'altra parte, l'accelerazione del punto A della punteria nel suo moto assoluto si può scrivere:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_{AC}^{(r)} + \vec{a}_A^{(t)} + \vec{a}_A^{(co)} = -\omega^2 D + \omega^2 (O - C) \qquad \textbf{(37)}$$

E allora, essendo:

$$\vec{a}_A^{(a)} = \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{d^2 h}{d\vartheta^2}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \omega^2 \frac{d^2 h}{d\vartheta^2} = \omega^2 h''$$

e tenendo conto della (35), la (37), proiettata sulla direzione della normale al contatto n-n (fig.27), si scriverà:

$$h''\cos\mu = -D\cos\varphi + h'\sin\mu$$

Dove D è il diametro della circonferenza dei flessi e φ l'angolo fra la normale alla traiettoria di A e la normale alle polari in C.
E' quindi:

$$D\cos\varphi = (F_1 - C) = h'\sin\mu - h''\cos\mu \qquad \textbf{(38)}$$

Ora, ricordando che il punto F_1 è il punto di flesso della normale alla traiettoria di A nel moto relativo della punteria rispetto alla

camme, dovrà essere:

$$(F_1 - A) = \frac{(C-A)^2}{\rho}$$

e quindi:

$$(F_1 - C) = \frac{(C-A)^2}{\rho} - (C-A)$$

Sostituendo nella (38) si avrà quindi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(C-A) + h' \sin\mu - h'' \cos\mu}{(C-A)^2} \qquad \textbf{(39)}$$

Ma, dal triangolo ABC (fig.26), si ricava:

$$(C-A) = \frac{(B-A)}{\cos\mu} = \frac{\rho_0 + h}{\cos\mu}$$

e quindi, sostituendo nella (39),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\cos\mu}{\rho_0 + h} + \left(\frac{\cos\mu}{\rho_0 + h}\right)^2 (h' \sin\mu - h'' \cos\mu) = \\ &= \frac{\cos\mu}{\rho_0 + h} + \frac{\cos^3\mu}{(\rho_0 + h)^2}(h' \tan\mu - h'') \end{aligned} \qquad \textbf{(40)}$$

Tenendo conto della (36), e che da questa stessa si ricava:

$$\cos\mu = \frac{\rho_0 + h}{\sqrt{(h'+e)^2 + (\rho_0 + h)^2}}$$

la (40) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{(h'+e)^2 + (\rho_0 + h)^2 + h'(h'+e) - h''(\rho_0 + h)}{\left[(h'+e)^2 + (\rho_0 + h)^2\right]^{3/2}} = \\ &= \frac{(\rho_0 + h)^2 + (h'+e)(2h'+e) - h''(\rho_0 + h)}{\left[(h'+e)^2 + (\rho_0 + h)^2\right]^{3/2}} \end{aligned} \qquad \textbf{(41)}$$

e quindi:

$$\rho = \rho_c + r_r = \frac{\left[(h'+e)^2 + (\rho_0 + h)^2\right]^{3/2}}{(\rho_0 + h)^2 + (h'+e)(2h'+e) - h''(\rho_0 + h)} \qquad \textbf{(42)}$$

Come caso particolare, ponendo *e=0*, si ottiene l'espressione per il raggio di curvatura di una camma con punteria centrata, e cioè:

$$\rho = \rho_c + r_r = \frac{\left[h'^2 + (\rho_0 + h)^2\right]^{3/2}}{(\rho_0 + h)^2 + 2h'^2 - h''(\rho_0 + h)} \qquad \textbf{(43)}$$

dove è però $\rho_0 = r_b + r_r$ solamente.

b) Camme radiale con punteria a bilanciere, con rullino di contatto.

Riprendiamo lo schema di fig.15, supponendo di nuovo che la camme, avente un cerchio base di raggio r_b, ruoti con velocità angolare ω_1 costante in verso orario intorno alla coppia rotoidale fissa O_1; la punteria, il cui braccio ha lunghezza l, ruoterà a sua volta con velocità angolare ω_2 intorno alla coppia rotoidale fissa A.

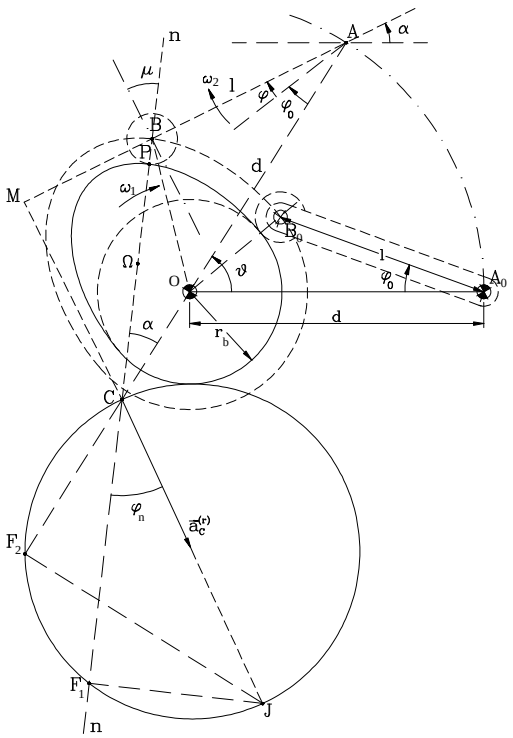

Figura 28

Il contatto fra punteria e camme avviene attraverso un rullino di raggio r_r, fulcrato in B: sia P il suo punto di contatto con la camme, ed n-n la normale di contatto in P. Indichiamo poi con l'angolo ϑ la coordinata lagrangiana che definisce la configurazione istantanea del meccanismo.

La legge dell'alzata della punteria sarà $\varphi = \varphi(\vartheta)$, $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\vartheta}$ la sua

velocità ed $\varphi'' = \dfrac{d^2\varphi}{d\vartheta^2}$ la sua accelerazione.

Anche in questo caso, la determinazione del raggio di curvatura ρ_c del profilo effettivo della camme risulta più agevole facendo riferimento prima al profilo primitivo descritto dal punto B; anche in questo caso, infatti, i due profili avranno punto per punto il medesimo centro di curvatura Ω, mentre i aggi di curvatura differiranno del raggio r_r del rullino.

Indicando con d la distanza AO fra le coppie rotoidali fisse, l'angolo φ_0 formato dal braccio della punteria nella configurazione iniziale A_0B_0, quella in cui il rullino si trova sull'ultimo punto del cerchio base, con la congiungente A_0O è dato da:

$$\cos\varphi_0 = \frac{d^2 + l^2 - (r_b + r_r)^2}{2dl}$$

In una configurazione generica OAB (fig.28) il braccio della punteria si troverà ruotato di un angolo pari a (φ_0+φ), e il contatto fra camme e rullino avverrà nel punto P; il centro C del moto relativo della punteria rispetto alla camme individua il triangolo OBC i cui lati insieme al segmento AB, braccio della punteria, consentono di scrivere l'espressione della velocità del suo estremo B come:

$$\vec{v}_B^{(a)} = \vec{v}_B^{(r)} + \vec{v}_B^{(t)} = (\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) \wedge (B - C) + \vec{\omega}_1 \wedge (B - O_1) \qquad \textbf{(44)}$$

da cui:

$$\vec{v}_B^{(a)} = \vec{\omega}_2 \wedge (B - A) = \vec{\omega}_2 \wedge (B - C) + \vec{\omega}_1 \wedge (C - O_1)$$

e quindi:

$$\vec{\omega}_2 \wedge (C - A) = \vec{\omega}_1 \wedge (C - O)$$

La relazione fra le due velocità angolari è data quindi da:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{C - O}{C - A} = \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \varphi' \qquad \textbf{(45)}$$

e quindi sarà anche:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 = \frac{A - O}{C - A} = \frac{d}{C - A} = \varphi' - 1 \qquad \textbf{(46)}$$

Ciò basta intanto per definire un'espressione per l'angolo di pressione μ, fra la normale al contatto n-n e la perpendicolare al braccio della punteria AB. Il triangolo BMC, rettangolo in M, consen-

te di scrivere:

$$\tan\mu = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{AC}\cos(\varphi+\varphi_0)-l}{\overline{AC}\sin(\varphi+\varphi_0)} = \frac{1}{\tan(\varphi+\varphi_0)} - \frac{l}{\overline{AC}\sin(\varphi+\varphi_0)}$$

da cui, moltiplicando numeratore e denominatore per d (=OA) e tenendo conto della (46):

$$\tan\mu = \frac{1}{\tan(\varphi+\varphi_0)} - \frac{l}{d\sin(\varphi+\varphi_0)}(\varphi'-1) \qquad \textbf{(47)}$$

D'altra parte, l'accelerazione del punto B della punteria nel suo moto assoluto, e se la camme ruota a velocità angolare costante, si può scrivere:

$$\vec{a}_B^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_{BC}^{(r)} + \vec{a}_B^{(t)} + \vec{a}_B^{(co)} \qquad \textbf{(48)}$$

dove è:

$$\vec{a}_B^{(a)} = \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (B-A) - \omega_2^2(B-A)$$

$$\vec{a}_C^{(r)} = \omega^{(r)^2}(J-C) = (\omega_2-\omega_1)^2(J-C)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{BC}^{(r)} &= \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (B-C) - (\omega_2-\omega_1)^2(B-C) = \\ &= \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (B-C) - \omega_1^2(B-C) - \omega_2^2(B-C) + 2\omega_1\omega_2(B-C)\end{aligned}$$

$$\vec{a}_B^{(t)} = -\omega_1^2(B-O) = -\omega_1^2(B-C) - \omega_1^2(C-O)$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B^{(co)} &= 2\vec{\omega}_1 \wedge [(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)\wedge(B-C)] = -2\omega_1(\omega_2-\omega_1)(B-C) = \\ &= 2\omega_1^2(B-C) - 2\omega_1\omega_2(B-C)\end{aligned}$$

Conviene effettuare la somma parziale (fig.29):

$$\begin{aligned}\vec{m} = \left[\vec{a}_{BC}^{(r)}\right]_n + \vec{a}_B^{(t)} + \vec{a}_B^{(co)} &= \\ &= -\omega_1^2(B-C) - \omega_2^2(B-C) + 2\omega_1\omega_2(B-C) + \\ &\quad -\omega_1^2(B-C) - \omega_1^2(C-O) + \\ &\quad +2\omega_1^2(B-C) \qquad -2\omega_1\omega_2(B-C) = \\ &= -\omega_2^2(B-C) - \omega_1^2(C-O)\end{aligned}$$

ed a questa sottrarre il componente normale della $\vec{a}_B^{(a)}$ ottenendo il vettore(fig.30):

$$\vec{s} = \vec{m} + \omega_2^2 (B - A) = \omega_2^2 (C - A) - \omega_1^2 (C - O) \qquad \textbf{(49)}$$

che è un vettore diretto secondo la congiungente AO e quindi inclinato dell'angolo α rispetto alla n-n,
La (48) si è ridotta qundi a tre soli termini e si può scrivere quindi come:

$$\vec{g} = \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C - A) =$$
$$= \omega^{(r)2} (J - C) + \vec{s}$$

dove il vettore a primo a primo membro risulta perpendicolare alla retta per i punti AO.
Allora proiettando quest'ultima equazione proprio sulla n-n si otterrà:

$$g \sin\alpha = \omega^{(r)2} (F_1 - C) - s \cos\alpha \qquad \textbf{(50)}$$

dove compare il ora il punto F_1 che è

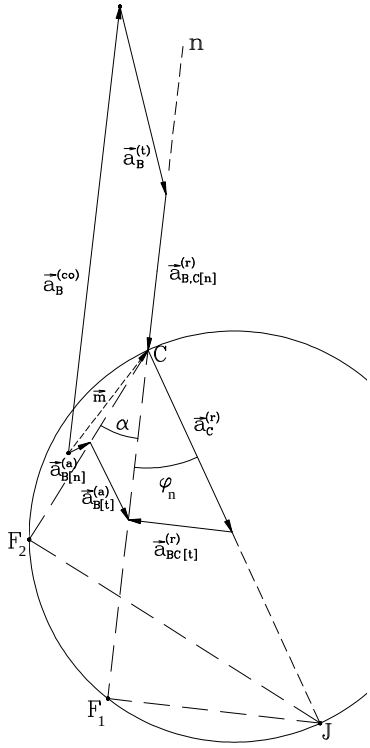

Figura 29

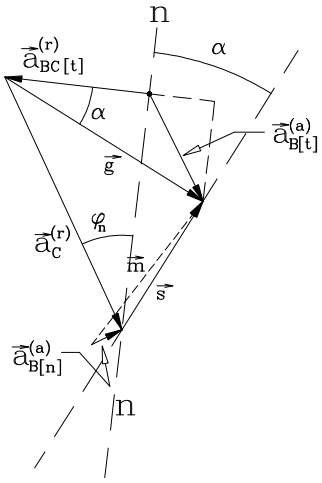

Figura 30

il punto di flesso della normale alla traiettoria di A nel moto relativo della punteria rispetto alla camme e per il quale deve valere la nota relazione:

$$(F_1 - B) = \frac{(C - B)^2}{\rho}$$

e dalla quale può pure ottenersi:

$$(F_1 - C) = (B - C) + \frac{(B - C)^2}{\rho} = (B - C)\left[1 + \frac{(B - C)}{\rho}\right] \qquad \textbf{(51)}$$

Ora, tenendo conto che è:

$$\frac{\dot{\omega}_2}{\omega_1^2} = \frac{d^2\varphi}{d\vartheta^2} = \varphi''$$

a primo membro della (50) si ha:

$$g\sin\alpha = \omega_1^2\varphi''(C-A)\sin\alpha \qquad \textbf{(52)}$$

mentre, tenendo conto delle (45), (46), e (51), il secondo membro della stessa si può scrivere:

$$\begin{aligned}
&\omega^{(r)^2}(F_1 - C) - s\cos\alpha = \omega_1^2(\varphi'-1)^2(F_1 - C) + \\
&\qquad - \omega_1^2(C-O)\left[\left(\frac{C-O}{C-A}\right)^2\frac{C-A}{C-O} - 1\right]\cos\alpha = \\
&= \omega_1^2(\varphi'-1)^2(B-C)\left[1+\frac{B-C}{\rho}\right] + \\
&\qquad - \omega_1^2(C-O)(\varphi'-1)\cos\alpha
\end{aligned} \qquad \textbf{(53)}$$

Uguagliando la (52 e la (53) si ottiene allora:

$$\begin{aligned}
\varphi''(C-A)\sin\alpha = (\varphi'-1)^2(B-C)\left[1+\frac{(B-C)}{\rho}\right] + \\
-(C-O)(\varphi'-1)\cos\alpha
\end{aligned}$$

ossia:

$$\varphi''\sin\alpha = (\varphi'-1)^2\frac{B-C}{C-A}\left[1+\frac{(B-C)}{\rho}\right] - \frac{(C-O)}{(C-A)}(\varphi'-1)\cos\alpha$$

e quindi:

$$\varphi''\sin\alpha = (\varphi'-1)^2\frac{B-C}{C-A}\left[1+\frac{(B-C)}{\rho}\right] - \varphi'(\varphi'-1)\cos\alpha$$

Si ricava allora:

$$\frac{1}{\rho}\frac{(B-C)^2}{(C-A)}(\varphi'-1)^2 = \varphi'(1-\varphi')\cos\alpha - (\varphi'-1)^2\frac{(B-C)}{(C-A)} + \varphi''\sin\alpha$$

e poi:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{(C-A)[\varphi'(\varphi'-1)\cos\alpha+\varphi''\sin\alpha]}{(B-C)^2(\varphi'-1)^2}-\frac{1}{(B-C)}+=$$
$$=\frac{1}{(B-C)}\left[\frac{(C-A)}{(B-C)}\frac{\varphi'(\varphi'-1)\cos\alpha+\varphi''\sin\alpha}{(\varphi'-1)^2}-1\right] \quad \textbf{(54)}$$

Inoltre, considerando i due triangoli ABC e BCM (fig.28) e indicando con δ la somma ($\varphi+\varphi_0$), si ha:

$$(B-C)\cos\mu=(C-A)\sin\delta$$

per cui si ha ancora:

$$\frac{(C-A)}{(B-C)}=\frac{\cos\mu}{\sin\delta} \quad \textbf{(55)}$$

e quindi la (54) diventa:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{(B-C)}\left[\frac{\cos\mu}{\sin\delta}\frac{\varphi'(\varphi'-1)\cos\alpha+\varphi''\sin\alpha}{(\varphi'-1)^2}-1\right]$$

E poi è anche:

$$(B-C)\sin\mu+l=(C-A)\cos\delta$$

e questa, insieme alla (55), ci dà:

$$(B-C)=\frac{l\sin\delta}{\cos(\delta+\mu)} \quad \textbf{(56)}$$

Sostituendo si ha quindi:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos(\delta+\mu)}{l\sin\delta}\left[\frac{\cos\mu}{\sin\delta}\frac{\varphi'(\varphi'-1)\cos\alpha+\varphi''\sin\alpha}{(\varphi'-1)^2}-1\right]$$

D'altra parte dal triangolo rettangolo AMC (fig.28) si rileva che è $\alpha=\pi/2-(\delta+\mu)$, e ciò consente, nella precedente, di esprimere α in funzione degli angoli caratteristici del meccanismo, scrivendo:

$$\frac{1}{\rho}=\chi\left[\chi l\cos\mu\frac{\varphi'(\varphi'-1)\tan(\delta+\mu)+\varphi''}{(\varphi'-1)^2}-1\right] \quad \textbf{(57)}$$

avendo posto:

$$\chi = \frac{\cos(\delta + \mu)}{l \sin \delta}$$

Quindi il raggio di curvatura risulta:

$$\rho = \frac{(\varphi' - 1)^2}{\chi \left\{ \frac{\cos\mu}{\sin\delta} \left[\varphi(\varphi' - 1)\sin(\delta + \mu) + \varphi'' \cos(\delta + \mu) \right] - (\varphi' - 1)^2 \right\}} \qquad \textbf{(57')}$$

Tenendo infine conto della espressione (47) dell'angolo di pressione μ, la (57') risulta funzione dei parametri geometrici del meccanismo e delle caratteristiche cinematiche della legge dell'alzata.

c) Camme con punteria a piattello traslante.

Anche in questo caso supponiamo che la camme (fig.31) ruoti in senso orario con velocità angolare $\vec{\omega}$ intorno alla coppia rotoidale O; la punteria trasla secondo un asse che ha eccentricità *e* rispetto all'asse di rotazione della camme. Sia ancora ϑ la coordinata lagrangiana che definisce la configurazione istantanea del meccanismo, e sia, quindi *h*=h(ϑ) la legge dell'alzata della punteria, con *h'*=dh/dϑ la legge della velocità, ed h"=$d^2h/d\vartheta^2$ quella dell'accelerazione.

Il raggio di curvatura ρ della camme, che si vuole determinare, può coincidere in questo caso con quello del profilo del punto tracciatore, se, come è naturale, si sceglie come tale proprio il punto di contatto P.

Nella configurazione iniziale la distanza A_0B_0 del profilo del piattello dall'asse di rotazione O vale proprio r_b, mentre per una configurazione generica la stessa distanza vale $AB = r_b + h$.

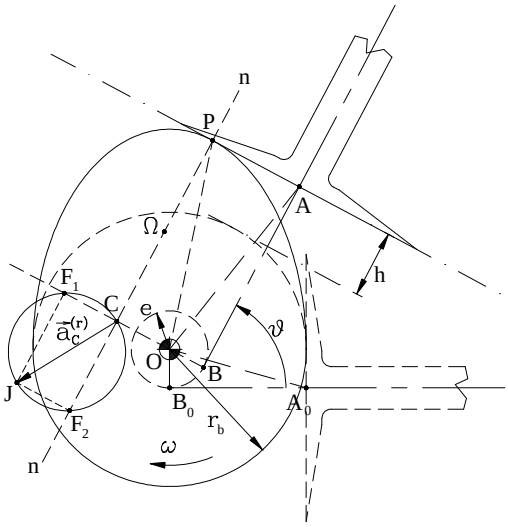

Figura 31

L'analisi del moto composto della punteria consente di scrivere:

$$\vec{v}_P^{(a)} = -\vec{\omega} \wedge (P - C) + \vec{\omega} \wedge (P - O) = \vec{\omega} \wedge (C - O)$$

dove C è il centro del moto relativo fra punteriae camme.
Quindi, poiché è $v_P^{(a)} = \omega h'$, si ricava:

$$(C - O) = h' \qquad \textbf{(58)}$$

mentre, d'altra parte, dato il parallelismo fra l'asse della traslazione della punteria e la normale al conattatto n-n, è anche:

$$(P - C) = (B - A) = r_b + h \qquad \textbf{(59)}$$

Possiamo ora calcolare la accelerazione del punto P (fig.32), dovendo essere:

$$a_P^{(a)} = \frac{d^2 h}{dt^2} = \omega^2 h'' \qquad \textbf{(60)}$$

ma anche:

$$\vec{a}_P^{(a)} = \vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_{PC}^{(r)} + \vec{a}_P^{(t)} + \vec{a}_P^{(co)}$$

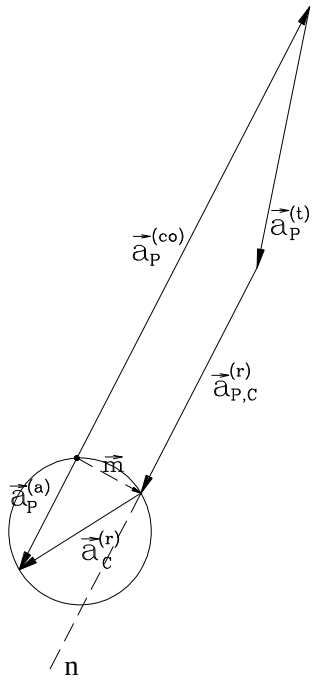

Figura 32

con:

$$\vec{a}_C^{(r)} = \omega^2 (J - C) \qquad \textbf{(61)}$$

dove J è il polo dei flessi relativo alla circonferenza per i punti C, F_1 ed F_2 (fig.31), trovati, questi ultimi, come i simmetrici rispettivamente di O e di Ω rispetto a C.
Inoltre è:

$$\vec{a}_{PC}^{(r)} = -\omega^2 (P - C)$$
$$\vec{a}_P^{(t)} = -\omega^2 (P - O)$$
$$\vec{a}_P^{(co)} = 2\omega^2 (P - C)$$

la cui somma dà luogo al vettore:

$$\vec{m} = -\omega^2 (C - O) \qquad \textbf{(62)}$$

che risulta quindi perpendicolare alla n-n.
Possiamo considerare allora l'eguaglianza dei componenti paralleli alla n-n ed avere, dalla (60) e (61), e dividendo per ω^2:

$$h'' = (F_2 - C) = (C - \Omega) \qquad \textbf{(63)}$$

per la simmetria prima considerata.
Ma, a sua volta è:

$$\rho = (P - \Omega) = (P - C) - (\Omega - C)$$

e quindi, per la (59) e la (63), si ha:

$$\rho = r_b + h + h'' \qquad \textbf{(64)}$$

Si noti che, anche se è stato considerato il caso di una punteria eccentrica, il valore della eccentricità non compare né nel risultato ottenuto né nella definizione della cinematica del meccanismo: tale parametro è pertanto ininfluente ai fini del comportamento del sistema.

d) Camme con punteria a piattello oscillante.

Esaminiamo infine il caso del meccanismo (fig.33) costituito da una camme avente coppia totoidale fissa O e rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ oraria e da una punteria a piattello che può oscillare intorno alla sua coppia rotidale fissa A.

Sia ancora ϑ la coordinata lagrangiana che definisce la configurazione istantanea del meccanismo, e imdichiamo, con $\varphi=\varphi(\vartheta)$ la legge dell'al-zata della punteria, con $\varphi'=d\varphi/d\vartheta$ la legge della velocità, e con $\varphi''=d^2\varphi/d\vartheta^2$ quella dell'accelerazione.

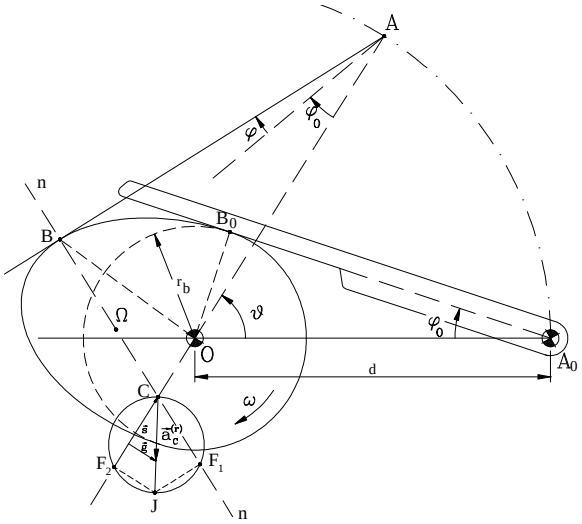

Figura 33

Si determinerà direttamente il raggio di curvatura effettivo ρ della camme, avendo scelto anche qui come punto tracciatore il punto di contatto B fra camme e piattello.

Sia d la distanza fra le coppie rotoidali A ed O e φ_0 l'angolo formato dalla punteria rispetto a tale congiungente nella

configurazione iniziale. Dal rapporto $(A_0B_0)/d$ si ha:

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{d}\sqrt{d^2 - r_b^{\,2}} = \sqrt{1-\left(r_b/d\right)^2} \qquad \textbf{(65)}$$

L'intersezione fra la normale di contatto n-n con la retta per A ed O individue per una configurazione generica del moto relativo fra camme e punteria il centro del moto C.

La successiva analisi cinematica, da questo punto in poi, è strettamente analoga a quella fatta per il caso b) e pertanto i rapporti fra le velocità angolari sono dati dalle (45) e (46), ed il calcolo delle accelerazioni (fig.34) si configura come nelle relazioni comprese fra la (48) e la (49).

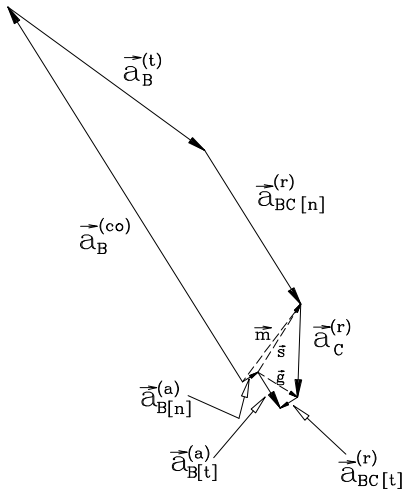

Figura 34

Possiamo quindi scriverne la relazione finale come:

$$\dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C-A) = (\omega_2-\omega_1)^2(J-C) + \omega_2^2(C-A) - \omega_1^2(C-O) \qquad \textbf{(66)}$$

con la precisazione che il polo J è quello della circonferenza dei flessi nel moto relativo definito, per i punti F_1, simmetrico di Ω rispetto a C, ed F_2, punto di flesso della normale alla traiettoria di A.

Nella (66), il primo membro è il vettore $\vec{g}$ (fig.34), mentre a secondo membro il primo vettore è chiaramente la $\vec{a}_C^{(r)}$, la somma degli altri due – paralleli - è il vettore $\vec{s}$.

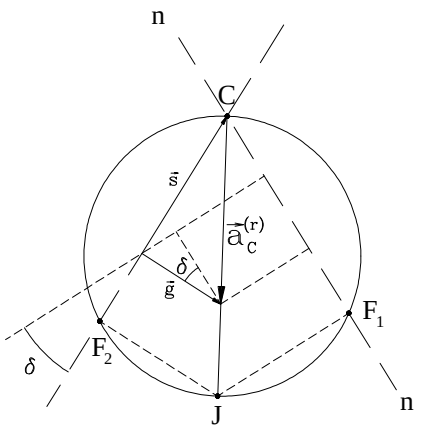

Figura 35

Anche qui quindi ci si riduce a tre soli vettori: il vettore $\vec{g}$ perpendicolare alla direzione della retta dei centri ed il vettore $\vec{s}$ parallelo ad essa. Rispetto a questa stessa retta il profilo del piattello risulta ruotato dell'angolo

$\delta=\varphi+\varphi_0$, per cui (fig.35), quando si proietta la (66) sulla direzione della normale n-n e si divide tutto per ω_1^2 si ottiene, tenendo conto delle (45) e (46):

$$\varphi''\cos\delta=(\varphi'-1)^2\frac{F_1-C}{C-A}-\left(\varphi'^2-\frac{C-O}{C-A}\right)\sin\delta$$

o anche, ancora per la (45):

$$\varphi''\cos\delta=(\varphi'-1)^2\frac{F_1-C}{C-A}-\varphi'(\varphi'-1)\sin\delta$$

Ricaviamo quindi:

$$F_1-C=\left[\frac{\varphi'}{(\varphi'-1)}\sin\delta+\frac{\varphi''}{(\varphi'-1)^2}\cos\delta\right](C-A)$$

e poi, tenendo conto della (46),

$$F_1-C=\left[\varphi'\sin\delta+\frac{\varphi''}{(\varphi'-1)}\cos\delta\right]\frac{d}{(\varphi'-1)^2} \qquad \textbf{(67)}$$

A questo punto, poiché il punto F_1 è il simmetrico del centro di curvatura Ω, possiamo scrivere:

$$F_1-C=C-\Omega=(B-\Omega)-(B-C)=$$
$$=\rho+(C-A)\sin\delta=\rho+\frac{d}{\varphi'-1}\sin\delta$$

e, sostituendo nella (67), ottenere:

$$\rho=\left[\varphi'\sin\delta+\frac{\varphi''}{(\varphi'-1)}\cos\delta-(\varphi'-1)\sin\delta\right]\frac{d}{(\varphi'-1)^2}$$

ossia:

$$\rho=\left[\sin(\varphi+\varphi_0)+\frac{\varphi''}{(\varphi'-1)}\cos(\varphi+\varphi_0)\right]\frac{d}{(\varphi'-1)^2} \qquad \textbf{(68)}$$

che è proprio il raggio di curvatura effettivo della camme in funzione delle caratteristiche della legge dell'alzata della punteria.

§ 8. – Criteri di scelta del moto della punteria.

Come si è visto nei precedenti paragrafi la geometria complessiva di una camme è strettamente dipendente alla legge del moto che si vuole imporre alla punteria; e questa, in generale, è descritta (facendo riferimento per semplicità ad una punteria in moto traslatorio) da una funzione $y = \mathrm{y}(t)$ continua e periodica caratterizzata in successione da: una fase di *alzata* che va da $y = \mathrm{y}(0) = 0$ a $y = \mathrm{y}(t_a) = H$; una fase di *arresto* in cui per un tempo t_i più o meno lungo (eventualmente anche nullo) rimane $y=H$; una fase di *discesa* della durata t_d al termine della quale è di nuovo

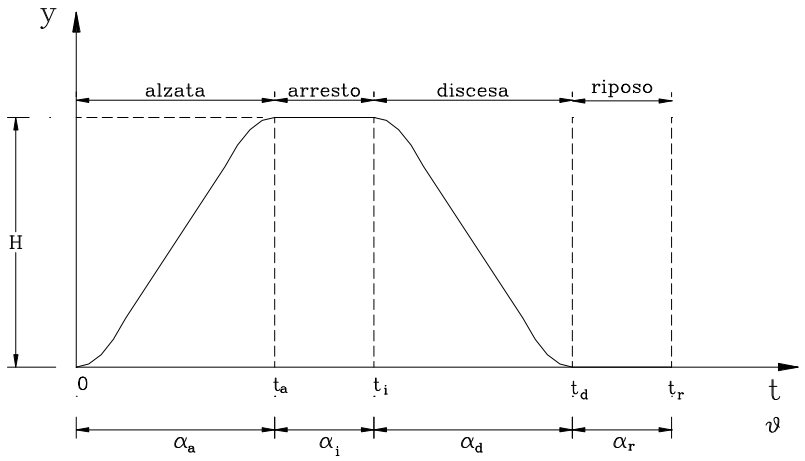

Figura 36

$y = \mathrm{y}(t_d) = 0$; una fase di *riposo* della durata t_r in cui rimane y=0. Queste quattro fasi si ripetono nell'ordine ad ogni giro della camme e quindi con un periodo T=2π/ω se ω è la velocità di rotazione della stessa; e se ω è costante gli intervalli temporali delle suddette fasi saranno proporzionali rispettivamente alle fasi angolari α_a, α_i, α_d, α_r; e sarà pure:

$$\dot{y} = \omega \frac{dy}{d\vartheta} = \omega y' \quad \text{e} \quad \ddot{y} = \omega^2 \frac{d^2 y}{d\vartheta^2} = \omega y''$$

Il valore di H e la durata delle quattro fasi angolari α_a, α_i, α_d, α_r sono gli unici vincoli di progetto legati alla funzione che la punteria deve svolgere nel suo funzionamento, mentre al modo in cui avviene la variazione di y è affidata la "qualità" del funzionamento del meccanismo. Infatti, facendo riferimento, per esempio, alla fase di alzata, le tre curve a, b, c, di fig. 37 mostrano che, per una

stessa rotazione α_a della camme, la punteria avrà il medesimo spostamento massimo H, ma, al contempo, ciascuna di esse, presentando, punto per punto, pendenza diversa e diversa curvatura, imprimerà alla punteria stessa modalità diverse di moto, ossia diversa velocità e diversa accelerazione.

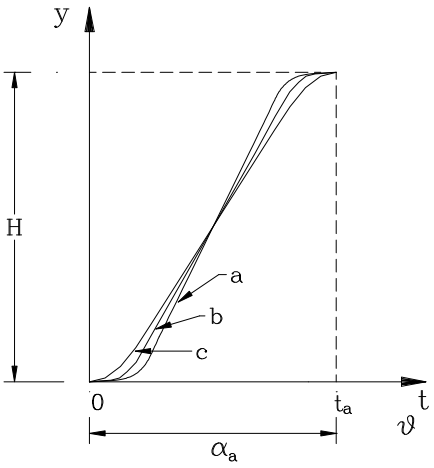

Figura 37

Ora, poiché dal valore dell'accelerazione della punteria dipende il valore delle azioni di inerzia cui essa è sottoposta, e quindi il comportamento dinamico della punteria stessa (sollecitazioni, urti, vibrazioni, ecc.), si comprende come la progettazione di una camme prende le mosse proprio dal diagramma delle accelerazioni imponendo un funzione che garantisca quanto più possibile la "dolcezza" del moto della punteria.

La funzione $\ddot{y}(t)$ che si sceglie deve, inoltre, essere tale da garantire una $y(t)$ che, al termine della rotazione α_a della camme, per rimanere nell'esempio, dia alla punteria lo spostamento massimo H desiderato ed una $\dot{y}(t)$ che abbia valore nullo agli estremi di tale intervallo. Ciò vuol dire che dovrà essere:

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_a} \dot{y}dt = H \\ &\dot{y}(t_a) = \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(69)}$$

e quindi per il diagramma delle accelerazioni:

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_a} \ddot{y}tdt = \dot{y}t\Big|_0^{t_a} - \int_0^{t_a} \dot{y}dt = -\int_0^{t_a} \dot{y}dt = -H \\ &\int_0^{t_a} \ddot{y}dt = \dot{y}(t_a) - \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(70)}$$

E' conveniente poi, dal punto di vista pratico, che la legge delle accelerazioni $\ddot{y}(t)$ sia espressa nella forma:

$$\ddot{y} = \frac{H}{t_a^2} f\left(\frac{t}{t_a}\right) \qquad \textbf{(71)}$$

separando cioè il fattore intensivo H/t_a^2 che ha ancora le dimensioni di una accelerazione, dalla funzione $f(t/t_a)$, adimensionale che rende conto solamente della "forma" della funzione.
Indicando con τ il rapporto t/t_a , le condizioni (70) si scriveranno:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \tau f(\tau) d\tau = -1 \\ &\int_0^1 f(\tau) d\tau = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(70')}$$

In tal modo, tracciando un diagramma della $f(\tau)$ che rispetta solamente la seconda delle condizioni (70) o (70') si ottiene una funzione a valor medio nullo definita a meno di una costante (fattore di scala); imponendo anche il rispetto della prima condizione tale costante di proporzionalità risulta determinata. Il diagramma effettivo delle accelerazioni si ottiene poi con la (71).

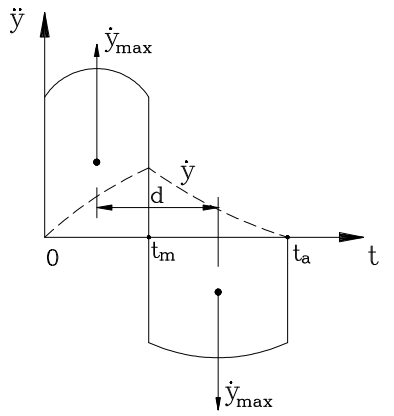

Figura 38

D'altra parte, poiché la punteria deve avere velocità nulla agli estremi del tratto 0-t_a, il corrispondente diagramma delle accelerazioni (fig.38) deve presentare almeno un istante t_m in cui il suo valore si annulla (istante di velocità massima): prima di t_m i valori saranno positivi, dopo saranno negativi. Contemporaneamente per essere vera la seconda delle (70) le due aree del diagramma devono essere uguali; dovrà essere cioè:

$$\int_0^{t_m} \ddot{y} dt = -\int_{t_m}^{t_a} \ddot{y} dt$$

Il valore di una delle due aree, una qualsiasi delle due, rappresenta di conseguenza il valore della massima velocità raggiunta dalla punteria.

Giudicare la qualità di un diagramma di accelerazione o

effettuare un confronto fra due di essi può essere fatto sulla base di alcuni valori caratteristici della funzione $f(\tau)$ che prendono il nome di *coefficienti di accelerazione*.
Il massimo valore positivo della $f(\tau)$ si indica con k_{a+}, il massimo valore negativo si indica con k_{a-}, il massimo fra i due semplicemente con k_a. Corrispondentemente avremo quindi:

$$\ddot{y}_{\max+} = k_{a+}\frac{H}{t_a^2};\ \ddot{y}_{\max-} = k_{a-}\frac{H}{t_a^2};\ \ddot{y}_{\max} = k_a\frac{H}{t_a^2}; \qquad \textbf{(72)}$$

Prende invece il nome di *coefficiente di velocità* k_v il rapporto fra la velocità massima della punteria ed il suo valor medio H/t_a, per cui si può scrivere:

$$\dot{y}_{\max} = k_v\frac{H}{t_a} \qquad \textbf{(73)}$$

deducendo immediatamente che, poiché la velocità massima non può mai essere inferiore al suo valore medio sarà sempre k_v>1.
Il valore di k_v dipende essenzialmente dalla distanza d fra i baricentri delle due aree (cfr. fig.38) ad accelerazione positiva e negativa. Infatti, l'area ad accelerazione positiva ha il suo baricentro in corrispondenza dell'ascissa t_1, l'area ad accelerazione negativa in corrispondenza di una ascissa t_2, e per tali ascisse deve essere:

$$\int_0^{t_m}\ddot{y}t\,dt = \dot{y}_{\max}t_1;\quad \int_{t_m}^{t_a}\ddot{y}t\,dt = -\dot{y}_{\max}t_2 = -\dot{y}_{\max}(t_1+d);$$

Pertanto sommando e tenendo conto della prima delle (70) si ha:

$$\int_0^{t_a}\ddot{y}t\,dt = -H = \dot{y}_{\max}(t_1-t_2) = -\dot{y}_{\max}d \qquad \textbf{(74)}$$

e quindi per la (73):

$$k_v = \frac{t_a}{d} \qquad \textbf{(75)}$$

Per il diagramma di fig.38 in cui è $d = t_a/2$ si ha k_v=2.
La relazione (74) è molto utile quando il valore di d può essere determinato in modo semplice: l'uguaglianza:

$$\dot{y}_{\max} = \frac{H}{d}$$

può essere una condizione alternativa alla prima delle condizioni (70') al fine di determinare la scala di rappresentazione.

L'andamento delle forze d'inerzia, legate all'accelerazione della punteria, costituiscono una quota importante del complesso delle forze agenti su di essa; anche in quanto, variando in modo periodico sono in grado di produrre indesiderate vibrazioni. Si cerca di conseguenza di limitare per quanto possibile l'accelerazione massima della punteria.
Facendo riferimento alla terza delle (72):

$$\ddot{y}_{\max} = k_a \frac{H}{t_a^2} \qquad \textbf{(72')}$$

si comprende come il suo minimo valore si avrà per il minimo valore della alzata massima H e per il minimo valore di k_a. Ora, il valore di H, che è legato allo scopo funzionale della punteria, dovrà essere il minimo indispensabile per garantire quel particolare scopo e quindi il poterne abbassare il valore potrà dipendere da modifiche in altra parte del dispositivo(*); il valore di k_a, invece dipende dalla forma del diagramma di accelerazione.

Il massimo valore di H che si può ottenere senza superare un prefissato valore di $\ddot{y}_{\max}$ è quello che si ottiene da una legge del motoin cui sia sempre $\ddot{y} = \ddot{y}_{\max}$ e cioè da una legge *ad accelerazione costante*.

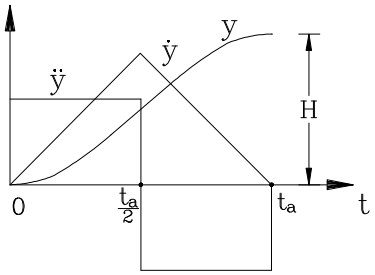

Figura 39

La legge ad accelerazione costante che dà il mimo di k_a e, contemporaneamente rispetti tutte le condizioni fin qui viste, è costituita (fig.39) da due tratti costanti e di segno opposto che durano ciascuno un tempo pari a $t_m = t_a/2$; le due aree sottese sono quindi uguali, ed è anche $d = t_a/2$ la distanza fra i loro baricentri.
Il coefficiente di velocità (75) sarà quindi anche qui k_v=2; il che

(*) Se, per esempio, al moto della punteria è demandata l'apertura, in un condotto, di una luce rettangolare di data area, la stessa area si otterrà diminuendone l'altezza ed aumentandone la base.

equivale a dire (73) che la velocità massima della punteria sarà il doppio della sua velocità media.
Inoltre, poiché la velocità massima corrisponde anche l'area sottesa dal tratto ad accelerazione positiva, sarà anche:

$$\dot{y}_{\max} = \ddot{y}_{\max} d = \ddot{y}_{\max} \frac{t_a}{2} = k_v \frac{H}{t_a} = \frac{2H}{t_a}$$

da cui:

$$\ddot{y}_{\max} = \frac{4H}{t_a^2} = k_a \frac{H}{t_a^2}$$

e pertanto k_a=4.
Se ne conclude che non sarà possibile avere una legge di moto con un coefficiente di accelerazione k_a<4, e quindi una punteria, che si debba alzare di H in un tempo t_a, non potrà avere un'accelerazione massima inferiore a $4H/t_a^2$.

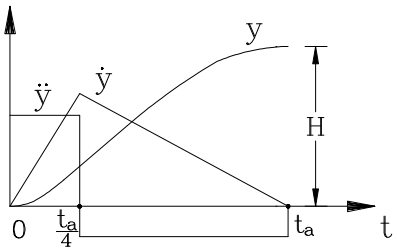

Figura 40

C'è da aggiungere che, quando possibile, si può anche sfruttare la circostanza che l'accelerazione massima risulta inversamente proporzionale al quadrato di t_a; si può dilatare quindi il tempo t_a ottenendo un H'>H ma anche una accelerazione massima certamente inferiore.
Se analizziamo il diagramma di accelerazione di fig.40 in cui il punto di inversione del segno della accelerazione si ha a $t_m = t_a/4$. La distanza fra i baricentri delle due aree (uguali) vale:

$$d = \frac{t_a + t_m}{2} - \frac{t_m}{2} = \frac{t_a}{2}$$

e quindi è ancora k_v=2.
Scriveremo invece:

$$\dot{y}_{\max} = \ddot{y}_{\max} d = \ddot{y}_{\max} \frac{t_a}{4} = \frac{2H}{t_a}$$

e quindi:

$$\ddot{y}_{\max} = \frac{8H}{t_a^2}$$

per cui il coefficiente di accelerazione è k_a=8.
A differenza del caso precedente, data l'asimmetria del diagramma, i coefficienti di accelerazione, k_{a+} e k_a-, relativi rispettivamente alla massima accelerazione positiva e negativa, saranno diversi.
Infatti avremo, per l'eguaglianza delle due aree sottese dal diagramma e per il fatto che ciascuna di esse dovrà essere eguale alla velocità massima:

$$\ddot{y}_{\max+} t_m = \ddot{y}_{\max-}(t_a - t_m) = \dot{y}_{\max} = k_v \frac{H}{t_a}$$

e quindi, avendo già calcolato k_v=2, avremo:

$$\ddot{y}_{\max+} = \frac{2H}{t_a t_m} = \frac{2t_a}{t_m}\frac{H}{t_a^2}$$
$$\ddot{y}_{\max-} = \frac{2H}{t_a(t_a - t_m)} = \frac{2t_a}{(t_a - t_m)}\frac{H}{t_a^2}$$

da cui segue:

$$k_{a+} = \frac{2t_a}{t_m} = \frac{2}{\tau_m}$$
$$k_{a-} = \frac{2t_a}{t_a - t_m} = \frac{2}{1-\tau_m} \qquad \textbf{(76)}$$

avendo posto $\tau_m = t_m / t_a$.
Infine, per il diagramma di fig.40 in cui è $\tau_m = 1/4$, si ha:

$$k_{a+} = 8; \quad k_{a-} = \frac{8}{3} = 2.667$$

Questo risultato, ma anche l'analisi delle (76), mostra che una asimmetria del diagramma delle accelerazioni consente la diminuzione di uno dei due coefficienti al di sotto del valore 4, ma a scapito dell'altro che cresce

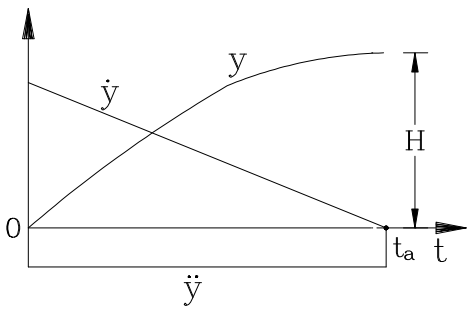

Figura 41

al di sopra di tale valore.
Nella pratica interessa ridurre il più possibile il valore della massima accelerazione negativa in quanto in tale fase la corrispondente forza d'inerzia risulta concorde con il verso della velocità della punteria e, se, come spesso accade, il vincolo fra camme e cedente è unilaterale, si potrebbe avere una perdita del contatto fra i due membri.
Il minimo valore di k_{a-} che si può ottenere (76) è 2 e si ha quando è $\tau_m = 0$: corrispondentemente si avrà $k_{a+} = \infty$.
E' il caso del diagramma di fig.41, in cui l'accelerazione ha per tutto il tempo dell'alzata un valore costante e negativo.

Il controllo del valore della coppia motrice agente sulla camme è possibile attraverso il coefficiente di velocità k_v: se il suo valore è contenuto sarà contenuto (73) pure, a parità di H e di t_a, il valore della velocità massima della punteria.
Infatti, considerando, come spesso accade, che l'aliquota maggiore della potenza motrice che la camme deve trasmettere è quella dovuta alla presenza della forza d'inerzia sulla punteria (immaginata ancora in moto traslatorio), possiamo scrivere:

$$W^* = C^*\omega = F'\dot{y} = m\ddot{y}\dot{y}$$

da cui:

$$C^* = \frac{W^*}{\omega} = \frac{F'\dot{y}}{\omega} = \frac{m}{\omega}\ddot{y}\dot{y} \qquad \textbf{(77)}$$

Vediamo quindi che, se si può ritenere ω=cost, l'andamento della potenza e quello della coppia coincidono, a meno di un fattore di scala; ma anche che tale andamento comune, nel tempo t_a di salita, dovrà presentare gli stessi due tratti, uno positivo ed uno negativo, del diagramma di accelerazione. Inoltre il diagramma della potenza (o della coppia) dovrà annullarsi agli estremi dell'intervallo 0- t_a essendo nullo in quei punti il valore della velocità. In definitiva l'andamento della coppia si presenterà come quello indicato qualitativamente in fig.42.

Ma la (77) ci dice anche che, a parità delle altre grandezze, il valore della coppia dipende punto per punto dal valore della velocità, e quindi a una riduzione

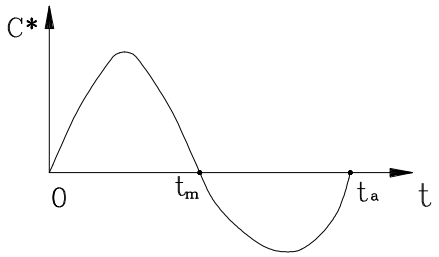

Figura 42

del coefficiente k_v corrisponde pure una riduzione del valore della coppia.

Per il diagramma di fig.39 si è visto che era k_v=2; si può ottenere un k_v minore modificandolo in quello di fig.43, in cui i due tratti ad accelerazione costante sono intervallati da un tratto ad accelerazione nulla fra t_{m1} e t_{m2}, ferma restando l'uguaglianza dei tratti 0-t_{m1} e t_{m2}-t_a.

Il diagramma di velocità che ne consegue è di tipo trapezoidale: deve avere, infatti, un tratto a velocità costante fra t_{m1} e t_{m2} dove l'accelerazione è nulla.

La distanza fra i baricentri delle due aree ad accelerazione non nulla, le cui basi sono uguali, risulta:

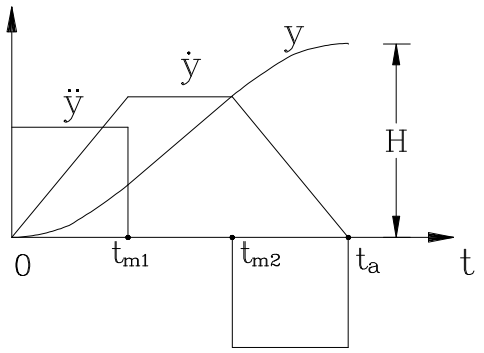

Figura 43

$$d = \frac{t_{m1}}{2} + \left(t_{m2} - t_{m1}\right) + \frac{t_{m1}}{2} = t_a - t_{m1}$$

e quindi, per la (75) il coefficiente di velocità risulta:

$$k_v = \frac{t_a}{d} = \frac{t_a}{t_a - t_{m1}} < 2 \qquad \textbf{(78)}$$

essendo $t_{m1} < t_a/2$.

Risulterà minore quindi anche la velocità massima

$$\dot{y}_{\max} = k_v \frac{H}{t_a} = \frac{H}{t_a - t_{m1}}$$

risultato d'altronde ovvio dal momento che l'area sottesa dal diagramma di velocità dovrà essere sempre eguale ad *H*.

Il precedente risultato (78) non potrà, tuttavia, non avere influenza sul coefficiente di accelerazione. Poiché la velocità massima deve eguagliare l'area del diagramma ad accelerazione positiva, dovremo scrivere:

$$\ddot{y}_{\max} = \frac{\dot{y}_{\max}}{t_{m1}} = \frac{H}{t_{m1}\left(t_a - t_{m1}\right)} = \left[\frac{t_a^2}{t_{m1}\left(t_a - t_{m1}\right)}\right]\frac{H}{t_a^2} = k_a \frac{H}{t_a^2}$$

evidenziando un coefficiente di accelerazione:

$$k_a = \frac{t_a^2}{t_{m1}(t_a - t_{m1})} = \frac{k_v^2}{k_v - 1} \qquad \textbf{(79)}$$

il cui valore, per un k_v<2, sarà maggiore del valore 4 trovato per il diagramma di fig.39.
Il diagramma della (79) riportato in fig.44 mostra tuttavia che non è conveniente scendere di molto con il valore di k_v in quanto corrispondentemente il valore di k_a finisce per essere eccessivamente elevato.
Di fatto, essendo in pratica k_a=8 il valore massimo accettabile per un coefficiente di accelerazione, il minimo valore raggiungibile per il coefficiente di velocità è k_v=1.2.

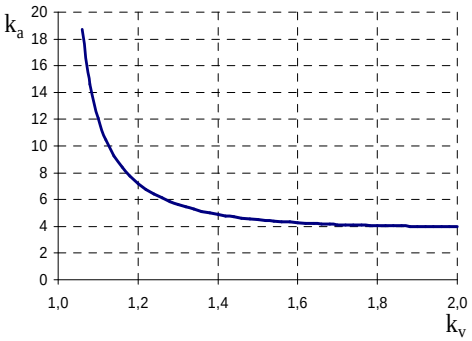

Figura 44

Si consideri infine che una diminuzione di k_v e quindi della velocità massima, consente (43) e (34) anche una diminuzione di r_b quindi dell'ingombro della camme.
Tornando al diagramma di fig.42, si può aggiungere che, dovendo essere:

$$\int_0^t W^* dt = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

esso deve avere necessariamente valor medio nullo, e cioè l'area positiva e quella negativa devono essere uguali; contemporaneamente ciascuna delle due aree dovrà essere uguale al massimo valore dell'energia cinetica della punteria. Ossia:

$$\int_0^{t_m} W^* dt = \frac{1}{2} m\dot{y}_{\max}^2 = \frac{1}{2} m c_v^2 \left(\frac{H}{t_a}\right)^2$$

La potenza massima, a sua volta, sarà data da:

$$W_{\max}^* = m(\dot{y}\ddot{y})_{\max} = m k_c \frac{H^2}{t_a^3}$$

da cui:

$$C^*_{\max} = \frac{W^*_{\max}}{\omega} = k_c \frac{mH^2}{\omega t_a^3}$$

avendo introdotto il *coefficiente di coppia* k_c il valore generalmente è $k_c \le k_v k_a$.

Sarà $k_c = k_v k_a$ quando velocità ed accelerazione raggiungono il loro massimo contemporaneamenten come accade per i diagrammi ad accelerazione costante, che quindi sono da questo punto di vista poco soddisfacenti; per il diagramma di fig.39 si ha $k_c = k_v k_a = 8$, ma per gli altri si avrà sempre $k_c > 6.75$.

Va meglio, invece, con un diagramma come quello di fig.45 in cui il diagramma di accelerazione ha un andamento lineare discendente con il valore nullo per $t=t_a/2$. Questa condizione di simmetria fa sì che le due aree, quella ad accelerazione positiva e quella ad accelerazione negativa, siano uguali e che la distanza fra i loro baricentri risulti:

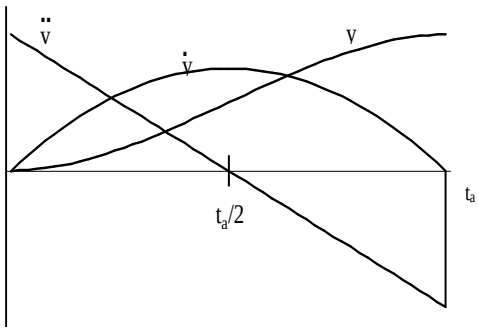

Figura 45

$$d = 2\frac{2}{3}\frac{t_a}{2} = \frac{2}{3}t_a$$

Pertanto si avrà un coefficiente di velocità:

$$k_v = \frac{t_a}{d} = 1.5$$

Inoltre, uguagliando l'area ad accelerazione positiva con il valore massimo della velocità si ha:

$$\frac{1}{2}\ddot{y}_{\max}\frac{t_a}{2} = \dot{y}_{\max} = k_v \frac{H}{t_a} = \frac{3}{2}\frac{H}{t_a}$$

da cui $\ddot{y}_{\max} = 6\frac{H}{t_a^2}$ e quindi un $k_a = 6$.

Possiamo scrivere, a questo punto, la legge dell'accelerazione che è:

$$\ddot{y} = \ddot{y}_{\max}\left(1 - 2\frac{t}{t_a}\right) = 6\frac{H}{t_a^2}(1 - 2\tau)$$

da cui, integrando, la legge della velocità:

$$\dot{y} = 6\frac{H}{t_a^2}\left(t - \frac{t^2}{t_a}\right) = 6\frac{H}{t_a}\tau(1 - \tau)$$

Il prodotto delle due funzioni appena trovate è:

$$\dot{y}\ddot{y} = 36\frac{H^2}{t_a^3}\tau(1 - 2\tau)(1 - \tau) = 36\frac{H^2}{t_a^3}\tau\left(1 - 3\tau + 2\tau^2\right) \qquad \textbf{(80)}$$

la cui derivata:

$$\frac{d(\dot{y}\ddot{y})}{d(t/t_a)} = 36\frac{H^2}{t_a^3}\left[1 - 3\tau + 2\tau^2 + \tau(4\tau - 3)\right] =$$

$$= 36\frac{H^2}{t_a^3}\left(1 - 6\tau + 6\tau^2\right)$$

si annulla per $\tau = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$; il massimo positivo si ha per $t_1 = 0.21 t_a$. In corrispondenza a tale valore la (80) diventa:

$$(\dot{y}\ddot{y})_{\max} = 36\frac{\sqrt{3}}{18}\frac{H^2}{t_a^3} = 2\sqrt{3}\frac{H^2}{t_a^3}$$

e quini sarà:

$$k_c = \frac{(\dot{y}\ddot{y})_{\max}}{H^2/t_a^3} = 2\sqrt{3} = 3{,}4\,.$$

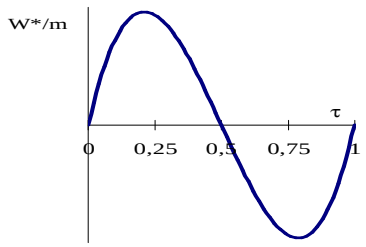

Figura 46

Un ulteriore problema legato alla scelta della legge dell'alzata è quello della possibilità dell'insorgere di vibrazioni a causa della discontinuità nella forma della accelerazione.
Una valutazione del fenomeno, sia pure in prima approssimazione, può farsi schematizzando il meccanismo come in fig.47; il modello tiene conto esclusivamente della elasticità dell'asta della punteria, trascurando sia la presenza della forza di chiusura della coppia (eventualmente elastica) sia di ogni effetto dissipativi (attrito nella guida, isteresi del materiale).

Indicando con x(t) il moto delle punteria e con y(t) il moto che la camme impone al suo punto di contatto, indichiamo il moto relativo fra i due membri con:

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

e scriviamo l'equazione del moto della punteria, di massa m, come:

$$m\ddot{x} + kz = 0$$

ovverosia:

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = \ddot{y} \qquad \textbf{(81)}$$

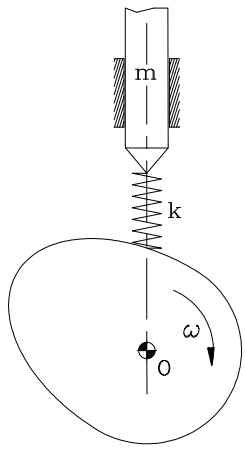

Figura 47

avendo posto $\omega_n^2 = k/m$, valore questo che indica una frequenza naturale certamente molto elevata data l'elevata rigidezza dell'asta lungo il proprio asse a fronte di una massa che possiamo supporre piccola.
Ora se la forzante è data dalla brusca variazione dell'accelerazione che all'istante iniziale passa dal valore 0 ad un valore costante $\ddot{y} = \ddot{y}_0$, la soluzione completa della (81) è del tipo:

$$z = A\sin\omega_n t + B\cos\omega_n t + \frac{\ddot{y}_0}{\omega_n^2}$$

Tenendo conto che per t=0 spostamento e velocità sono nulli si possono determinare le costanti A e B i cui valori saranno:

$$A = 0; \qquad B = -\frac{\ddot{y}_0}{\omega_n^2};$$

La legge del moto relativo fra camme e punteria sarà espressa allora da:

$$z = \frac{\ddot{y}_0}{\omega_n^2}\left(1 - \cos\omega_n t\right) \qquad \textbf{(82)}$$

Ciò vuol dire che l'accelerazione cui è sottoposta la punteria nel suo moto assoluto vale:

$$\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y} = \ddot{y}_0\cos\omega_n t + \ddot{y}_0 = \ddot{y}_0\left(1 + \cos\omega_n t\right) \qquad \textbf{(83)}$$

mostrando che il suo valore può raggiungere anche il valore doppio di quello preventivato, e indipendentemente, peraltro, da quale sia il valore della frequenza naturale.

Non si dimentichi tuttavia che il modello adottato non tiene conto delle azioni dissipative da cui non si può prescindere e che avranno come effetto quello di attenuare l'entità del fenomeno.
Adottando una diversa legge dell'accelerazione, una che non presenti brusche variazioni, i risultati potranno essere migliori.

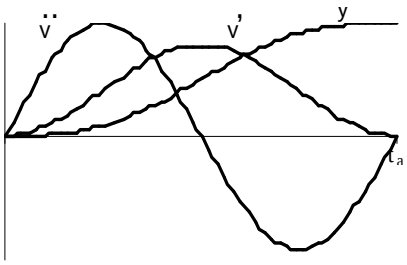

Figura 48

Una delle più note è la legge cicloidale (fig.48) il cui diagramma di accelerazione ha l'andamento sinusoidale:

$$\ddot{y} = k_a \frac{H}{t_a^2} \sin\left(\frac{2\pi}{t_a} t\right) \qquad \textbf{(84)}$$

il cui valore massimo è:

$$\ddot{y}_{\max} = k_a \frac{H}{t_a^2} \qquad \textbf{(85)}$$

Data la simmetria di tale andamento, la distanza fra i baricentri delle due aree è $d=t_a/2$, per la (75) è $k_v = t_a / d = 2$; inoltre l'area positiva vale:

$$k_a \frac{H}{t_a^2} \int_0^{t_a/4} \sin\left(\frac{2\pi}{t_a} t\right) dt = k_a \frac{H}{t_a^2} \frac{t_a}{2\pi} \left[-\cos\left(\frac{2\pi}{t_a} t\right) \right]_0^{t_a/4} =$$

$$= k_a \frac{H}{t_a^2} \frac{t_a}{\pi} = \frac{t_a}{\pi} \ddot{y}_{\max}$$

ossia per cui dovendo questa essere uguale alla velocità massima si ricava:

$$\frac{t_a}{\pi} \ddot{y}_{\max} = \dot{y}_{\max} = k_v \frac{H}{t_a} = 2 \frac{H}{t_a}$$

e quindi:

$$\ddot{y}_{\max} = 2\pi \frac{H}{t_a^2}$$

Ne segue che è $k_a = 2\pi \cong 6.28$.

Con una legge di questo tipo, e quindi in assenza di brusche va-

riazioni di accelerazioni, il valore massimo della accelerazione della punteria nel suo moto assoluto risulta più basso anche se è più alto il valore massimo della $\ddot{y}$.
Integrando la (84) e imponendo che sia $\dot{y} = 0$ agli estremi dell'intervallo 0-t_a, si ottiene la legge della velocità:

$$\dot{y} = \frac{H}{t_a}\left(1 - \cos\frac{2\pi t}{t_a}\right)$$

e, integrando una seconda volta, quella dell'alzata:

$$y = H\left(\frac{t}{t_a} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{t_a}\right)$$

§ 9. – Definizione del diagramma dell'alzata.

Quando si sia scelto il valore massimo H dell'alzata che si vuol far conseguire alla punteria in un determinato arco temporale t_a (ma si può ragionre anche sulla base dei corrispondenti angoli di rotazione della camme), uno dei metodi per ottenere la legge del moto $y = \mathrm{y}(t)$ consiste nello stabilire in via preventiva il diagramma delle accelerazioni $\ddot{y} = \ddot{\mathrm{y}}(t)$ per poi ottenere la $y = \mathrm{y}(t)$ con una doppia integrazione. Le due costanti di integrazione che intervengono potrebbero utilizzarsi per imporre le due condizioni:

$$y(0) = 0 \qquad \text{ed} \qquad y(t_a) = H \qquad \textbf{(86)}$$

In tal modo, però, la scelta del diagramma delle accelerazioni sarebbe completamente arbitraria, ed inoltre non risulterebbero garantite le ulteriori due condizioni:

$$\dot{y}(0) = 0 \qquad \text{ed} \qquad \dot{y}(t_a) = 0 \qquad \textbf{(87)}$$

necessarie ad evitare discontinuità nel diagramma delle velocità e quindi il manifestarsi di urti.
Per risolvere questo problema si utilizzano le due costanti di integrazione per imporre le due condizioni rappresentate dalla prima delle (86) e dalla prima delle (87), mentre per soddisfare alla seconda delle (87) si adotta un diagramma di accelerazione a valor medio nullo. Infatti se è:

$$\ddot{y}_{med} = \frac{1}{t_a}\int_0^{t_a} \ddot{y}(t)dt = 0 \qquad \textbf{(88)}$$

risulta automaticamente:

$$\dot{y}(t_a) = \int_0^{t_a} \ddot{y}(t)dt = 0 \qquad \textbf{(89)}$$

Per soddisfare infine la seconda delle (86) sarà sufficiente che il diagramma delle accelerazioni sia dato inizialmente a scala unitaria, e fissando quest'ultima alla fine imponendo appunto che sia $y(t_a) = H$.

Esempio.

a)

Si supponga che la punteria debba alzarsi di H=5mm, comandata da una camme che ruoti con una velocità angolare $\omega = 6.5\,\text{rad/s}$, e che ciò debba avvenire entro 90° di rotazione della stessa. Si è optato per un diagramma ad accelerazione costante generalizzato (fig.49) caratterizzato da un tratto ad accelerazione positiva della durata di 1/4 t_a, da un tratto ad accelerazione negativa della durata di 1/3t_a, e, fra i due, un tratto ad accelerazione nulla che risulterà della durata di 5/12 t_a.

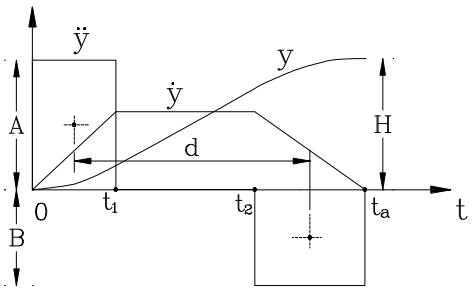

Figura 49

Con i dati assegnati si ha t_a=0.24s, e quindi il tratto ad accelerazione positiva avrà termine per t_1=0.06s, il tratto ad accelerazione nulla per t_2=0.16s.

Indicando con A il valore massimo della accelerazione positiva e con B il valore massimo di quella negativa, e, ancora, con τ, τ_1 e τ_2 i rapporti t/t_a t_1/t_a e t_2/t_a rispettivamente, imponiamo l'uguaglianza delle due aree, e cioè che sia:

$$A\tau_1 = B(1-\tau_2)$$

Quindi dovrà essere:

$$\frac{A}{B} = \frac{1-\tau_2}{\tau_1} = \frac{4}{3}$$

Inoltre la distanza d fra i baricentri delle due aree è:

$$d = t_a\left(\frac{1+\tau_2}{2} - \frac{\tau_1}{2}\right) = \frac{t_a}{2}\left(1+\tau_2-\tau_1\right) = \frac{s}{2}t_a \cong 0.71t_a$$

Ora, la velocità massima deve valere:

$$\dot{y}_{\max} = At_1 = A\tau_1 t_a$$

e quindi, per la (74), si deve avere anche:

$$H = \dot{y}_{\max} d = A\tau_1 \frac{s}{2} t_a^2$$

Si ricava quindi:

$$A = \frac{2}{\tau_1 s}\frac{H}{t_a^2} \cong 5.65\frac{H}{t_a^2} \cong 0.49\,\mathrm{m/s^2}$$

$$B = \frac{3}{4}A \cong 4.24\frac{H}{t_a^2} \cong 0.39\,\mathrm{m/s^2}$$

Si può ora procedere alle due successive integrazioni della legge dell'accelerazione per avere la legge dell'alzata; integrazioni che, data la forma del diagramma, vanno effettuate separatamente per ciascuno dei tratti 0-τ_1, τ_1-τ_2, τ_2-1.

Per il tratto 0-τ_1, ed imponendo le condizioni $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, si ha:

$$\ddot{y} = A; \quad \dot{y} = \int_0^\tau At_a d\tau = \frac{2}{\tau_1 s}\frac{H}{t_a}\tau \cong 5.65\frac{H}{t_a}\tau \cong 0.12\tau;$$

$$y = \frac{2}{\tau_1 s}\frac{H}{t_a}\int_0^\tau t_a \tau\, d\tau = \frac{2}{\tau_1 s}H\frac{1}{2}\tau^2 \cong 2.82H\tau^2 \cong 0.014\tau^2;$$

Al termine dell'intervallo, ossia per $\tau=\tau_1$, sarà in particolare:

$$\dot{y}(\tau_1) = \frac{2}{s}\frac{H}{t_a} \cong 1.41\frac{H}{t_a} \cong 0.029\,\text{m/s};$$

$$y(\tau_1) = \frac{\tau_1}{s}H \cong 0.765H \cong 0.004\,\text{m};$$

Per il tratto τ_1-τ_2, si ha invece:

$$\ddot{y} = 0; \quad \dot{y} = \text{cost} = \dot{y}(\tau_1);$$

$$y = y(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{y}(\tau_1) t_a d\tau = \frac{\tau_1}{s}H + \frac{2}{s}H\int_{\tau_1}^{\tau} d\tau = \frac{2\tau - \tau_1}{s}H =$$

$$\cong (1.41\tau - 0.18)H \cong 0.007\tau - 0.001$$

e per τ=τ_2:

$$\dot{y}(\tau_2) = \dot{y}(\tau_1) = \dot{y}_{\max} = 0.029\text{m/s}$$

$$y(\tau_2) = \frac{2\tau_2 - \tau_1}{s}H \cong 0.765 \cdot H \cong 0.004\,\text{m}$$

Nell'ultimo tratto, τ_2-1, si ha infine:

$$\ddot{y} = -B\frac{H}{t_a^2}; \quad \dot{y} = \dot{y}(\tau_2) - \frac{H}{t_a^2}\int_{\tau_2}^{\tau} B t_a d\tau = \frac{2}{s}\cdot\frac{1-\tau}{1-\tau_2}\cdot\frac{H}{t_a} \cong 18.4 - 18.38t;$$

$$y = y(\tau_2) + \frac{2}{s(1-\tau_2)}\cdot\frac{H}{t_a}\int_{\tau_2}^{\tau}(1-\tau)t_a d\tau = y(\tau_2) + \frac{(1-\tau)^2}{s(1-\tau_2)}\cdot H\cdot =$$

$$= \frac{1}{s}\left[2\tau_2 - \tau_1 + \frac{\tau_2(\tau_2 - 2) - \tau(\tau - 2)}{1-\tau_2}\right]H \cong 4.24\tau - 2.12\tau^2 - 1.12$$

Le caratteristiche della legge del moto ottenuta risultano quindi:

$$k_{a+} = \ddot{y}_{\max+}\frac{t_a^2}{H} = A = \frac{2}{\tau_1 s} \cong 5.65$$

$$k_{a-} = \ddot{y}_{\max-}\frac{t_a^2}{H} = B = \frac{2}{(1-\tau_2)s} \cong 4.24$$

$$k_v = \dot{y}_{\max}\frac{t_a}{H} = \dot{y}(\tau_1)\frac{t_a}{H} = \frac{2}{s} \cong 1.41$$

mentre la posizione all'istante in cui la velocità è massima è data in forma adimensionale da:

$$\frac{y(\tau_1)}{H} = \frac{\tau_1}{s} \cong 0.765$$

b)

Lasciando inalterati i dati del problema precedente, si possono evitare i bruschi salti di accelerazione all'inizio e al termine delle aree positiva e negativa, modificando il diagramma delle accelerazioni in quello trapezoidale di fig.50, in cui il passaggio dal valore nullo al valore massimo e viceversa sia di tipo lineare. Ciò vuol dire che il massimo di accelerazione positiva si ha all'istante t'_1, e per un tratto pari a t'_1-t''_1, in cui è $t''_1 < t_1$; inoltre il massimo di accelerazione negativa si ha all'istante t'_2 ($t'_2 > t_2$), e per un tratto pari a t'_2-t''_2, in cui è $t''_2 < t_a$.

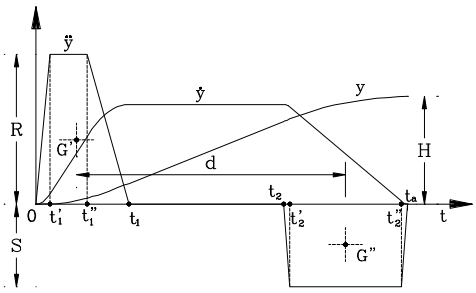

Figura 50

Per poter avere un confronto con il caso precedente, si sono lasciate invariate le lunghezze dei tratti 0-t_1 e t_2-t_a, e si è fissato poi che i tratti 0-t'_1e t''_1-t_1 siano rispettivamente il 15% ed il 45% dell'intero tratto 0-t_1, e che i tratti t_2-t'_2 e t''_2-t_a siano ciascuno il 5% del tratto t_2-t_a.

Rapportando quindi al valore di t_a, lo stesso del caso precedente, avremo quindi in termini dimensionali:

$$\tau_0 = 0; \qquad \tau'_1 = 0.038; \ \tau''_1 = 0.138; \ \tau_1 = 0.25;$$
$$\tau_2 = 0.667; \ \tau'_2 = 0.683; \ \tau''_2 = 0.983; \ \tau_a = 1$$

Indicando con R il valore massimo della accelerazione positiva e con S il valore massimo della accelerazione negativa, l'eguaglianza delle due aree sottese dal diagramma della accelerazione si esprime come:

$$\frac{1}{2}R(\tau_1 + \tau''_1 - \tau'_1)t_a = \frac{1}{2}S(1 - \tau_2 + \tau''_2 - \tau'_2)t_a$$

e da qui si avrà che deve essere:

$$\frac{S}{R}=\frac{\rho}{\sigma}=\frac{\tau_1+\tau''_1-\tau'_1}{1+\tau''_2-\tau'_2-\tau_2}=\frac{0.35}{0.6333}<1 \qquad \textbf{(90)}$$

Per la (74), si deve ancora avere:

$$H=\dot{y}_{\max}d=\frac{1}{2}R\rho t_a d \qquad \textbf{(91)}$$

dove *d* è la distanza fra i baricentri dei due trapezi, che va quindi calcolata.
Allo scopo, indichiamo con B_+ e b_+ rispettivamente la base maggiore e minore del trapezio positivo, e con B_- e b_- analogamente le due basi del trapezio negativo. Avremo:

$$B_+=\tau_1 t_a=0.25t_a; \qquad b_+=(\tau''_1-\tau'_1)t_a=0.1t_a;$$
$$B_-=(1-\tau_2)t_a=0.33t_a; \qquad b_-=(\tau''_2-\tau'_2)t_a=0.3t_a;$$

e quindi i due baricentri G_+ e G_- disteranno dall'asse delle ascisse di:

$$h_{G_+}=\frac{1}{3}R\frac{B_++2b_+}{B_++b_+}=\frac{1}{3}R\frac{0.45}{0.35}=0.429R$$
$$h_{G_-}=\frac{1}{3}S\frac{B_-+2b_-}{B_-+b_-}=\frac{1}{3}S\frac{0.933}{0.633}=0.491S$$

D'altra parte, indicati con m_+ ed M_+ i punti medi delle due basi superiore e inferiore del trapezio positivo, e con m_- ed M_- i corrispondenti punti del trapezio negativo, devono sussistere le due relazioni di proporzionalità:

$$\frac{R}{M_+-m_+}=\frac{h_{G_+}}{M_+-x_{G+}}$$
$$\frac{S}{m_--M_-}=\frac{h_{G_-}}{x_{G-}-M_-}$$

avendo indicato con x_{G+} ed x_{G-} le ascisse dei due baricentri.
Ora essendo:

$$M_+ = \frac{1}{2}\tau_1 t_a = 0.125 t_a; \quad m_+ = \frac{1}{2}(\tau'_1 + \tau''_1) t_a = 0.088 t_a;$$

$$M_- = \frac{1}{2}(1+\tau_2) t_a = 0.833 t_a; \quad m_- = \frac{1}{2}(\tau'_2 + \tau''_2) t_a = 0.833 t_a;$$

si può ricavare(*):

$$x_{G+} = M_+ - \frac{h_{G_+}}{R}(M_+ - m_+) = (0.125 - 0.429 \cdot 0.038) t_a = 0.109 t_a$$

$$x_{G-} = M_- - \frac{h_{G_-}}{S}(M_- - m_-) = 0.833 t_a$$

Pertanto sarà:

$$d = x_{G_-} - x_{G_+} = \delta t_a = (0.833 - 0.109) t_a = 0.724 t_a$$

Sostituendo questo valore nella (91) e tenendo conto della (90) si otterrà allora:

$$R = \frac{2H}{\rho t_a d} = \frac{2}{\rho\delta}\frac{H}{t_a^2} = 7.888\frac{H}{t_a^2};$$

$$S = \frac{2H}{\rho t_a d}\frac{\rho}{\sigma} = \frac{2}{\sigma\delta}\frac{H}{t_a^2} = 4.359\frac{H}{t_a^2};$$

Poiché R ed S sono i valori massimi dell'accelerazione, positiva e negativa, saranno proprio:

$$k_{a+} = 7.888; \qquad k_{a-} = 4.359;$$

i coefficienti di accelerazione, positiva e negativa: ben maggiore il primo, di poco maggiore il secondo rispetto ai valori trovati nel caso a).
Dalla prima uguaglianza della (91) si può pure ricavare:

$$\dot{y}_{\max} = \frac{H}{d} = \frac{1}{\delta}\frac{H}{t_a} = 1.380\frac{H}{t_a}$$

deducendo quindi il coefficiente di velocità, $k_v = 1.38$, che risulta invece più basso di quello precedentemente trovato.
Infatti, il trapezio positivo ha il lato discendente con una pendenza minore del lato crescente e di conseguenza il suo baricentro risulta spostato più a sinistra del punto M_+, determinando quindi un

(*) Che sia $M_-=m_-$ è ovvio, trattandosi, per la scelta fatta, di un trapezio isoscele.

valore di *d* più elevato rispetto a ciò che si avrebbe se i due lati fossero simmetrici, come nel caso a).
Questa circostanza suggerisce quindi che converrà, per data ampiezza delle basi maggiore e minore, che quest'ultima risulti il più possibile spostata verso sinistra rispetto alla prima, ovvero, in altri termini, che sia quanto più grande possibile la differenza $(M_+ - m_+) > 0$.

La descrizione analitica del diagramma delle accelerazioni richiede ancora la determinazione della pendenza dei tratti ad accelerazione variabile.
Indicando con α_+ ed α_-, rispettivamente le pendenze positive e negative dei lati del trapezio positivo, e con β_+, e β_-, quelle corrispondenti al trapezio negativo, sarà:

$$\alpha_+ = \frac{R}{\tau'_1 t_a} = \frac{2}{\rho\,\delta\tau'_1}\frac{H}{t_a^3} = 210.353\frac{H}{t_a^3}$$

$$\alpha_- = -\frac{R}{(\tau_1 - \tau''_1)t_a} = -\frac{2}{\rho\,\delta(\tau_1 - \tau''_1)}\frac{H}{t_a^3} = -70.118\frac{H}{t_a^3}$$

$$\beta_- = -\frac{S}{(\tau'_2 - \tau_2)t_a} = -\frac{2}{\sigma\,\delta(\tau'_2 - \tau_2)}\frac{H}{t_a^3} = -261.558\frac{H}{t_a^3}$$

$$\beta_+ = \frac{S}{(1 - \tau''_2)t_a} = \frac{2}{\sigma\,\delta(1 - \tau''_2)}\frac{H}{t_a^3} = 261.558\frac{H}{t_a^3}$$

Avremo allora per i sette differenti tratti del diagramma:
- nel tratto 0-t'$_1$

$$\ddot{y}_1 = \alpha_+ \tau t_a = \frac{2}{\rho\delta\tau'_1}\tau\frac{H}{t_a^2} = 210.353\tau\frac{H}{t_a^2}; \quad \text{con} \quad \ddot{y}(\tau'_1) = 7.888\frac{H}{t_a^2}$$

- nel tratto t'$_1$- t''$_1$:

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}(\tau'_1) = 7.888\frac{H}{t_a^2}; \quad \text{con} \quad \ddot{y}(\tau''_1) = \ddot{y}(\tau'_1) = 7.888\frac{H}{t_a^2}$$

- nel tratto t''$_1$- t$_1$:

$$\ddot{y}_3 = \ddot{y}(\tau''_1) + \alpha_-(\tau - \tau''_1)t_a = (17.529 - 70.118\tau)\frac{H}{t_a^2};$$

$$\text{con} \quad \ddot{y}(\tau_1) = 0$$

- nel tratto t$_1$- t$_2$: $\ddot{y}_4 = 0$; con $\ddot{y}(\tau_2) = 0$

- nel tratto t_2- t'_2:

$$\ddot{y}_5 = \beta_-(\tau - \tau_2)t_a = (174.372 - 261.558\tau)\frac{H}{t_a^2};$$

$$\text{con} \quad \ddot{y}(\tau_2) = -4.359\frac{H}{t_a^2}$$

- nel tratto t'_2- t''_2:

$$\ddot{y}_6 = \ddot{y}(\tau'_2) = -4.359\frac{H}{t_a^2}; \quad \text{con} \quad \ddot{y}(\tau''_2) = -4.359\frac{H}{t_a^2}$$

- nel tratto t''_2- t_a:

$$\ddot{y}_7 = \ddot{y}(\tau''_2) + \beta_+(\tau - \tau''_2) = (-261.558 + 261.558\tau)\frac{H}{t_a^2};$$

$$\text{con} \quad \ddot{y}(1) = 0$$

Da queste espressioni, con due successive integrazioni, è possibile ricavare l'andamento della velocità e dello spostamento del cedente. E si ha:
- nel tratto 0-t'_1

$$\dot{y}_1 = \int_0^\tau \ddot{y}_1 t_a d\tau = \frac{H}{t_a}\frac{2}{\rho\delta\tau'_1}\int_0^\tau \tau d\tau = \frac{H}{t_a}\frac{\tau^2}{\rho\delta\tau'_1} = 210.353\tau^2 \cdot \frac{H}{t_a}$$

$$\text{con} \quad \dot{y}(\tau'_1) = 0.148 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_1 = \int_0^\tau \dot{y}_1 t_a d\tau = H\frac{1}{\rho\delta\tau'_1}\int_0^\tau \tau^2 d\tau = H\frac{\tau^3}{3\rho\delta\tau'_1} = 35.059\tau^3 \cdot H$$

$$\text{con} \quad y(\tau'_1) = 0.002 \cdot H$$

- nel tratto t'_1- t''_1:

$$\dot{y}_2 = \dot{y}(\tau'_1) + \int_{\tau'_1}^\tau \ddot{y}_2 t_a d\tau = \frac{H}{t_a}[0.148 + 7.888(\tau - \tau'_1)] =$$

$$= (7.888\tau - 0.148)\cdot\frac{H}{t_a}; \quad \text{con} \quad \dot{y}(\tau''_1) = 0.937 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_2 = y(\tau'_1) + \int_{\tau'_1}^{\tau} \dot{y}_2 t_a d\tau = \left[0.002 - 0.148\tau + 3.944\tau^2\right] \cdot H$$

$$\text{con} \quad y(\tau''_1) = 0.056 \cdot H$$

- nel tratto t”$_1$- t$_1$:

$$\dot{y}_3 = \dot{y}(\tau''_1) + \int_{\tau''_1}^{\tau} \ddot{y}_3 t_a d\tau = \left[-0.811 + 17.529\tau - 35.059\tau^2\right] \cdot \frac{H}{t_a}$$

$$\text{con} \quad \dot{y}(\tau_1) = 1.380 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_3 = y(\tau''_1) + \int_{\tau''_1}^{\tau} \dot{y}_3 t_a d\tau =$$

$$= \left[-0.032 - 0.811\tau + 8.756\tau^2 - 11.686\tau^3\right] \cdot H$$

$$\text{con} \quad y(\tau_1) = 0.195 \cdot H$$

- nel tratto t$_1$- t$_2$:

$$\dot{y}_4 = \dot{y}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \ddot{y}_4 t_a d\tau = 1.38 \cdot \frac{H}{t_a}; \quad \text{con} \quad \dot{y}(\tau_2) = 1.38 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_4 = y(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{y}_4 t_a d\tau = (-0.150 + 1.38\tau) \cdot H$$

$$\text{con} \quad y(\tau_2) = 0.770 \cdot H$$

- nel tratto t$_2$- t’$_2$:

$$\dot{y}_5 = \dot{y}(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\tau} \ddot{y}_5 t_a d\tau =$$

$$= \left(-56.744 + 174.372\tau - 130.779\tau^2\right) \cdot \frac{H}{t_a}$$

$$\text{con} \quad \dot{y}(\tau'_2) = 1.344 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_5 = y(\tau_2) + \int_{\tau_2}^{\tau} \dot{y}_5 t_a d\tau =$$
$$= \left(12.766 - 56.744\tau + 87.186\tau^2 - 43.593\tau^3\right) \cdot H$$
$$\text{con} \quad y(\tau'_2) = 0.793 \cdot H$$

- nel tratto t'$_2$- t"$_2$:

$$\dot{y}_6 = \dot{y}(\tau'_2) + \int_{\tau'_2}^{\tau} \ddot{y}_6 t_a d\tau = (4.323 - 4.359\tau) \cdot \frac{H}{t_a}$$
$$\text{con} \quad \dot{y}(\tau''_2) = 0.036 \cdot \frac{H}{t_a}$$

e poi

$$y_6 = y(\tau'_2) + \int_{\tau'_2}^{\tau} \dot{y}_6 t_a d\tau = \left(-1.144 + 4.323\tau - 2.180\tau^2\right) \cdot H$$
$$\text{con} \quad y(\tau''_2) = 0.9998 \cdot H$$

- nel tratto t"$_2$- t$_a$:

$$\dot{y}_7 = \dot{y}(\tau''_2) + \int_{\tau''_2}^{\tau} \ddot{y}_7 t_a d\tau = \left(130.779 - 261.558\tau + 130.779\tau^2\right) \cdot \frac{H}{t_a}$$
$$\text{con} \quad \dot{y}(1) = 0$$

e poi

$$y_7 = y(\tau''_2) + \int_{\tau''_2}^{\tau} \dot{y}_7 t_a d\tau =$$
$$= \left(-42.593 + 130.779\tau - 130.779\tau^2 + 43.593\tau^3\right) \cdot H$$
$$\text{con} \quad y(1) = 1$$

Si può qundi riscontrare che la posizione della punteria, all'istante in cui la velocità è massima, è data in forma adimensionale da:

$$\frac{y(\tau_1)}{H} = 0.195$$

b’)

Modifichiamo adesso la ripartizione degli intervalli sull’asse dei tempi del diagramma delle accelerazioni diminuendo l’ampiezza del tratto ad accelerazione nulla al 30% di t_a e assegnando poi il 30% di t_a alla base del trapezio positivo ed il 40% alla base di quello negativo (fig.51).

Inoltre fissiamo, sia per il trapezio positivo che per quello negativo, un intervallo del 5% della base per la rampa crescente ed uno del 60% della stessa per la rampa decrescente.

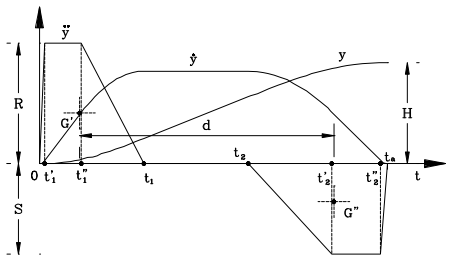

Figura 51

In termini adimensionali, quindi, i nuovi valori delle ascisse corrispondenti ai punti in cui cambia la legge dell’accelerazione saranno:

$$\tau_0 = 0; \qquad \tau'_1 = 0.015; \quad \tau''_1 = 0.12; \quad \tau_1 = 0.3;$$
$$\tau_2 = 0.6; \qquad \tau'_2 = 0.84; \quad \tau''_2 = 0.98; \quad \tau_a = 1$$

Avremo di conseguenza:

$$\frac{S}{R} = \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\tau_1 + \tau''_1 - \tau'_1}{1 + \tau''_2 - \tau'_2 - \tau_2} = \frac{0.405}{0.540} < 1$$

e, poi, ricalcolate le ascisse, la distanza fra i due baricentri, diventa:

$$d = x_{G_-} - x_{G_+} = \delta t_a = (0.846 - 0.115) t_a = 0.731 t_a$$

Quindi i valori massimi delle accelerazioni, positiva e negativa, diventano:

$$R = \frac{2}{\rho\delta}\frac{H}{t_a^2} = 6.757\frac{H}{t_a^2};$$
$$S = \frac{2}{\sigma\delta}\frac{H}{t_a^2} = 5.068\frac{H}{t_a^2};$$

ottenendo quindi:

$$k_{a+} = 6.757; \qquad k_{a-} = 5.068;$$

ossia un coefficiente di accelerazione positiva inferiore del 14% e un coefficiente di accelerazione negativa maggiore del 16%, ri-

spetto alla scelta precedente.
Inoltre, per quanto concerne la velocità massima, si ottiene:

$$\dot{y}_{\max} = \frac{H}{d} = \frac{1}{\delta}\frac{H}{t_a} = 1.368\frac{H}{t_a}$$

e quindi un $k_v = 1.368$ che è invece più basso dello 0.8%.

§ 10.- Diagrammi polinomiali.

Il procedimento seguito nel precedente paragrafo per la determinazione del diagramma dell'alzata della punteria, prende le mosse, come si è visto, dal diagramma dell'accelerazione.

Esistono, tuttavia, altri metodi che seguono il procedimento inverso: assegnare direttamente la legge dell'alzata y=y(t) in forma arbitraria e imporle le condizioni desiderate e necessarie; ciò vuol dire partire da una espressione analitica contenente un certo numero di costanti, pari alle condizioni che si vogliono imporre, della forma:

$$y = \mathrm{y}(t, A, B, C, ...)$$

e determinare queste ultime imponendo le opportune condizioni alle sue derivate.
Le leggi che si ottengono vengono dette polinomiali e vengono identificate in base agli esponenti che compaiono nella espressione della y(t).
Nella forma più semplice si può partire da una espressione del tipo:

$$y = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5$$

le cui 6 costanti si determineranno imponendo le sei condizioni:

$$\begin{array}{lll} y(0) = 0 & \dot{y}(0) = 0 & \ddot{y}(0) = 0 \\ y(t_a) = H & \dot{y}(t_a) = 0 & \ddot{y}(t_a) = 0 \end{array} \qquad \textbf{(92)}$$

Eseguendo i calcoli, come è possibile, in forma adimensionale, le espressioni su cui lavorare saranno:

$$\frac{y}{H} = y(\tau) = A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + E\tau^4 + F\tau^5 \qquad [\tau = t/t_a]$$

$$\frac{\dot{y}}{H/t_a} = y' = B + 2C\tau + 3D\tau^2 + 4E\tau^3 + 5F\tau^4$$

$$\frac{\ddot{y}}{H/t_a^2} = y'' = 2C + 6D\tau + 12E\tau^2 + 20F\tau^3$$

Ora, se a queste espressioni si impongono le prime tre condizioni delle (92), si ha che deve essere $A = B = C = 0$; imponendo poi le altre tre si ha che deve essere soddisfatto il sistema:

$$\begin{cases} D + E + F = 1 \\ 3D + 4E + 5F = 0 \\ 6D + 12E + 20F = 0 \end{cases}$$

Si può quindi ricavare:

$D = 10;$

$E = -15;$

$F = 6$

per cui l'espressione della legge dell'alzata e delle sue derivate risulta data da:

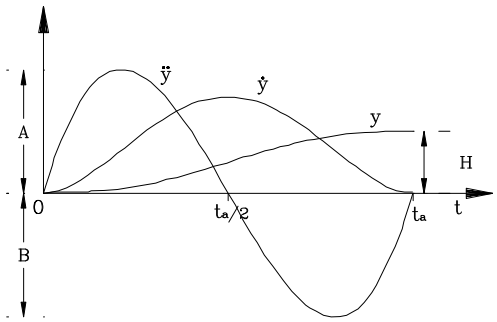

Figura 52

$$y = \left(10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5\right)H$$

$$\dot{y} = \left(30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4\right)\frac{H}{t_a}$$

$$\ddot{y} = \left(60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3\right)\frac{H}{t_a^2}$$

ottenendo quindi una *polinomiale 3-4-5* (fig.52).
Considerando, poi, che la derivata dell'accelerazione si annulla per $\tau_1 = 0.2113$ e $\tau_2 = 0.7886$, e che per tali valori l'accelerazione vale $\ddot{y}_1 = 5.773\frac{H}{t_a^2}$ e $\ddot{y}_2 = -5.773\frac{H}{t_a^2}$ si ha che è:

$$k_{a+} = k_{a-} = 5.773$$

Inoltre, poiché, oltre ai punti estremi, l'accelerazione si annulla

per $\tau = 0.5$, si ha per la velocità $\dot{y}_{\max} = 1.875\dfrac{H}{t_a}$, e quindi $k_v = 1.875$.

Questa procedura è, come si è visto abbastanza semplice; consente anche di imporre altre condizioni partendo da una legge dell'alzata che preveda un adeguato numero di coefficienti da determinare.